

# Trabajo Fin de Máster

## Máster en Ingeniería Industrial

### Estudio comparativo entre el módulo de Elementos Finitos de CATIA V5 y ANSYS Workbench

Autor: Miriam Cañones Castellano

Tutor: Francisco Andrés Valderrama Gual

**Dpto. de Expresión Gráfica**  
**Escuela Técnica Superior de Ingeniería**  
**Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2019





Trabajo Fin de Máster  
Máster en Ingeniería Industrial

# **Estudio comparativo entre el módulo de Elementos Finitos de CATIA V5 y ANSYS Workbench**

Autor:

Miriam Cañones Castellano

Tutor:

Francisco Andrés Valderrama Gual

Profesor titular

Dpto. de Expresión Gráfica  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla  
Sevilla, 2019

Trabajo Fin de Máster: Estudio comparativo entre el módulo de Elementos Finitos de CATIA V5 y ANSYS Workbench

Autor: Miriam Cañones Castellano

Tutor: Francisco Andrés Valderrama Gual

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2019

El Secretario del Tribunal



# Agradecimientos

---

A mis padres y hermano

*Sevilla, 2019*

<b>Agradecimientos</b>	<b>5</b>
<b>Índice</b>	<b>6</b>
<b>ÍNDICE DE TABLAS</b>	<b>8</b>
<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b>	<b>9</b>
<b>Resumen</b>	<b>1</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2 Bases matemáticas de un software de elementos finitos</b>	<b>5</b>
2.1 Descripción general de una herramienta de simulación de Elementos Finitos	5
2.2 Introducción al problema elástico	6
2.3 Ecuaciones fundamentales	9
2.3.1 Equilibrio	9
2.3.2 Comportamiento	10
2.3.3 Compatibilidad	11
2.4 Formulación débil del problema elástico	12
2.5 Pasos del método	14
2.5.1 Selección de un modelo matemático apropiado y definición de las propiedades mecánicas	14
2.5.2 Discretizar el dominio	14
2.5.3 Selección de una interpolación apropiada o modelo de desplazamiento	15
2.5.4 Derivación de las matrices de rigidez y vectores de carga	15
2.5.5 Ensamblar ecuaciones elementales	17
2.5.6 Incorporar las condiciones de contorno	18
2.5.7 Resolución del sistema de ecuaciones	18
2.5.8 Post-processing	19
2.5.9 Validación de los resultados	19
<b>3 Descripción general de ANSYS Workbench V19</b>	<b>21</b>
3.1 Introducción	21
3.2 Entorno general de trabajo	21
3.3 Ejemplo guiado	25
<b>4 Descripción general de CATIA y su módulo FEM</b>	<b>35</b>
4.1 Introducción	35
4.2 Entorno general de trabajo	35
4.3 Ejemplo guiado	38
4.3.1 Obtención del modelo geométrico	38
4.3.2 Simulación de la pieza	47
<b>5 Descripción de las piezas y condiciones de simulación</b>	<b>55</b>
5.1 Pieza 1: Placa cuadrada	55

5.2	Pieza 2: Tubería	57
5.3	Pieza 3: Soporte con taladros	59
5.4	Pieza 4: Cabeza de taladro	61
5.5	Pieza 5: Llanta de vehículo	62
6	<b>Resultados</b>	<b>65</b>
6.1	Pieza 1: Placa cuadrada	65
6.1.1	Carga Puntual	65
6.1.2	Presión	66
6.1.3	Temperatura	67
6.2	Pieza 2: Tubería	68
6.2.1	Presión	68
6.2.2	Temperatura	69
6.3	Pieza 3: Soporte con taladros	70
6.3.1	Fuerza Distribuida	70
6.3.2	Temperatura	71
6.4	Pieza 4: Cabeza de taladro	72
6.4.1	Momento Puntual	72
6.4.2	Presión	73
6.4.3	Temperatura	74
6.5	Pieza 5: Llanta de vehículo	75
6.5.1	Fuerza Distribuida	75
6.5.2	Temperatura	76
7	<b>Discusión</b>	<b>77</b>
7.1	Carga puntual	77
7.2	Presión/Fuerza distribuida	77
7.3	Temperatura	78
8	<b>Conclusiones</b>	<b>81</b>
	<b>Referencias</b>	<b>83</b>

# ÍNDICE DE TABLAS

---

Tabla 1. Nodos y pesos de cuadratura gaussiana.	19
Tabla 2. Solicitaciones en la Pieza 1.	55
Tabla 3. Propiedades del Acero convencional en CATIA.	56
Tabla 4. Condiciones de la malla.	56
Tabla 5. Condiciones de contorno de empotramiento.	56
Tabla 6. Solicitaciones en Pieza 2.	57
Tabla 7. Propiedades del Cobre en CATIA.	58
Tabla 8. Condiciones de la malla.	58
Tabla 9. Solicitaciones en Pieza 3.	59
Tabla 10. Condiciones de la malla.	60
Tabla 11. Solicitaciones en Pieza 4.	61
Tabla 12. Condiciones de la malla.	62
Tabla 13. Solicitaciones en Pieza 5.	62
Tabla 14. Propiedades del Aluminio en CATIA.	63
Tabla 15. Condiciones de la malla.	63
Tabla 16. Resultados para la acción carga puntual.	77
Tabla 17. Resultados para la acción Presión/Fuerza distribuida.	77
Tabla 18. Resultados para la acción Temperatura.	78

# ÍNDICE DE FIGURAS

---

Figura 1. Esquema general de una herramienta de simulación.	5
Figura 2. Esquema detallado de una herramienta de simulación [2].	6
Figura 3. Esquema general del problema elástico [3].	6
Figura 4. Componentes del tensor de tensiones en las caras vistas de un punto M de un sólido 3D.	7
Figura 5. Sólido sometido a una tensión tangencial $\tau$ .	7
Figura 6. Tres puntos sometidos a una deformación tangencial.	8
Figura 7. Curva tensión-deformación del ensayo normalizado de tracción para un acero convencional.	8
Figura 8. Barra sometida a una carga longitudinal en el extremo.	9
Figura 9. Ecuaciones diferenciales de Equilibrio en un fragmento infinitesimal del dominio.	10
Figura 10. Curvas cualitativas tensión-deformación para distintos materiales.	11
Figura 11. Discretización del dominio en elementos.	14
Figura 12. Funciones de forma para el caso de un elemento rectangular lagrangiano y lineal [11].	15
Figura 13. Dos muelles conectados en paralelo bajo la acción de una fuerza.	16
Figura 14. Nodos y puntos de cuadratura en un elemento.	19
Figura 15. Solución aproximada y analítica en los nodos tras extrapolación.	19
Figura 16. Diagrama de flujo de la resolución de un problema mediante MEF [17].	20
Figura 17. Vista general del entorno de trabajo.	22
Figura 18. Entorno de trabajo con un bloque de análisis.	22
Figura 19. Bloque de sistema.	22
Figura 20. Interfaz del módulo “Engineering Data”.	23
Figura 21. Menú contextual de la celda geometría.	23
Figura 22. Interfaz de trabajo en DesignModeler.	24
Figura 23. Interfaz de trabajo en SpaceClaim.	24
Figura 24. Menú contextual de “Replace Geometry” en la celda de geometría.	25
Figura 25. Placa cuadrada importada en DesignModeler para el ejemplo guiado del Apartado 3.3.	25
Figura 26. Interfaz de trabajo de Ansys Mechanical.	26
Figura 27. Tipos de elementos en ANSYS [19].	27
Figura 28. Mallado automático en la placa cuadrada.	27
Figura 29. Selección de superficies para aplicar Face Meshing.	28
Figura 30. Placa tras aplicar la herramienta Face Meshing.	28
Figura 31. Menú contextual de “Static Structural” e “Insert”.	29
Figura 32. Condiciones de contorno de encastre en las superficies laterales de la placa.	29
Figura 33. Árbol de trabajo de DesignModeler tras la creación del Sketch.	30

Figura 34. Sketch sobre la superficie superior de la placa.	30
Figura 35. Actualización del mallado tras generar la partición de superficie.	31
Figura 36. Fuerza concentrada en el centro de la placa.	31
Figura 37. Presión generalizada en la superficie interior de la placa.	32
Figura 38. Acción de temperatura en toda la placa.	32
Figura 39. Árbol completo tras obtener la solución.	32
Figura 40. Desplazamientos en la placa bajo la acción de carga puntual.	33
Figura 41. Tensión equivalente de Von-Mises en la placa bajo la acción de carga puntual.	33
Figura 42. Máxima tensión principal en la placa bajo la acción de carga puntual.	34
Figura 43. Entorno general de trabajo de CATIA V5.	36
Figura 44. Menú contextual de 'Start'.	36
Figura 45. Árbol de trabajo desplegado con objetos elementales.	37
Figura 46. Pieza por modelar en CATIA para el ejemplo guiado del Apartado 4.3.	38
Figura 47. Árbol de trabajo.	38
Figura 48. Rectángulo sobre el sketch.	39
Figura 49. Aplicación de restricciones de simetría.	39
Figura 50. Introducción de las cotas deseadas en el Sketch.	39
Figura 51. Arco en la esquina superior del Sketch.	40
Figura 52. Arco tras la introducción de restricciones y eliminación de las líneas sobrantes.	40
Figura 53. Sketch tras utilizar la herramienta 'Mirror' respecto del eje vertical V.	41
Figura 54. Cambio de apariencia del Sketch tras utilizar la herramienta 'Exit Workbench'.	41
Figura 55. Extrusión del Sketch en el plano XY.	41
Figura 56. Nuevo Sketch por realizar en el plano ZX.	42
Figura 57. Líneas de tangencia exteriores y arista proyectada en el Sketch.	42
Figura 58. Sketch tras utilizar la herramienta "Line".	43
Figura 59. Sketch tras eliminar las líneas auxiliares.	43
Figura 60. Extrusión del Sketch en el plano ZX.	44
Figura 61. Aristas por redondear y diálogo de trabajo de la herramienta "Edge Fillet".	44
Figura 62. Sketch en la extrusión superior.	45
Figura 63. Extrusión del boceto realizado en la extrusión superior.	45
Figura 64. Proyección en el Sketch por medio de la herramienta "Project 3D elements".	46
Figura 65. Sketch del perfil del rigidizador.	46
Figura 66. Extrusión del rigidizador y Dialog Box de la herramienta "Stiffener Definition".	47
Figura 67. Menú contextual de 'Analysis & Simulation'.	47
Figura 68. Dialog Box "New Analysis Case".	48
Figura 69. Librería de materiales disponibles en CATIA.	48
Figura 70. Apariencia de la pieza tras utilizar la opción de visualización "Shading with material".	49
Figura 71. Dialog Box 'OCTREE Tetrahedron Mesh'.	49
Figura 72. Menú "Model Manager".	50
Figura 73. Mallado automático de la pieza.	50
Figura 74. Menú "Constraints".	50

Figura 75. Encastre de la superficie interior de los taladros en la pieza.	51
Figura 76. Menú “Loads”.	51
Figura 77. Fuerza distribuida en la pieza ejemplo.	52
Figura 78. Dialog Box de la herramienta “Compute”.	52
Figura 79. Dialog Box “Global Adaptativity”.	52
Figura 80. Barra de herramientas “Image”.	53
Figura 81. Barra de herramientas “Analysis Tools”.	53
Figura 82. Average iso de la tensión de Von Mises.	53
Figura 83. Corte de la pieza realizado mediante la herramienta “Analysis Tools”.	53
Figura 84. Placa cuadrada.	55
Figura 85. Solicitaciones en Pieza 1.	55
Figura 86. Condiciones de contorno en Pieza 1.	56
Figura 87. Tubería.	57
Figura 88. Solicitaciones en Pieza 2.	57
Figura 89. Condiciones de contorno en Pieza 2.	58
Figura 90. Soporte con taladros.	59
Figura 91. Solicitaciones en Pieza 3.	59
Figura 92. Condiciones de contorno en Pieza 3.	60
Figura 93. Cabeza de taladro.	61
Figura 94. Solicitaciones en Pieza 4.	61
Figura 95. Condiciones de contorno en Pieza 4.	62
Figura 96. Llanta de vehículo.	62
Figura 97. Solicitaciones en Pieza 5.	63
Figura 98. Condiciones de contorno en Pieza 5.	64
Figura 99. Desplazamiento total para la acción de Carga Puntual en Pieza 1.	65
Figura 100. Tensión de Von Mises para la acción de Carga Puntual en Pieza 1.	65
Figura 101. Tensión Principal para la acción de carga puntual en Pieza 1.	65
Figura 102. Desplazamiento global para la acción de Presión en Pieza 1.	66
Figura 103. Tensión de Von Mises para la acción de Presión en Pieza 1.	66
Figura 104. Tensión Principal para la acción de Presión en Pieza 1.	66
Figura 105. Desplazamiento global para la acción de Temperatura en Pieza 1.	67
Figura 106. Tensión de Von Mises para la acción de Temperatura en Pieza 1.	67
Figura 107. Tensión Principal para la acción de Temperatura en Pieza 1.	67
Figura 108. Desplazamiento global para la acción de Presión en Pieza 2.	68
Figura 109. Tensión de Von Mises para la acción de Presión en Pieza 2.	68
Figura 110. Tensión Principal para la acción de Presión en Pieza 2.	68
Figura 111. Desplazamiento global para la acción de Temperatura en Pieza 2.	69
Figura 112. Tensión de Von Mises para la acción de Temperatura en Pieza 2.	69
Figura 113. Tensión Principal para la acción de Temperatura en Pieza 2.	69
Figura 114. Desplazamiento global aplicando Fuerza Distribuida en Pieza 3.	70
Figura 115. Tensión de Von Mises aplicando Fuerza Distribuida en Pieza 3.	70

Figura 116. Tensión Principal aplicando Fuerza Distribuida en Pieza 3.	70
Figura 117. Desplazamiento global para la acción de Temperatura en Pieza 3.	71
Figura 118. Tensión de Von Mises para la acción de Temperatura en Pieza 3.	71
Figura 119. Tensión Principal para la acción de Temperatura en Pieza 3.	71
Figura 120. Desplazamiento global aplicando un Momento Puntual en Pieza 4.	72
Figura 121. Tensión de Von Mises aplicando un Momento Puntual en Pieza 4.	72
Figura 122. Tensión Principal aplicando un Momento Puntual en Pieza 4.	72
Figura 123. Desplazamiento global para la acción de Presión en Pieza 4.	73
Figura 124. Tensión de Von Mises para la acción de Presión en Pieza 4.	73
Figura 125. Tensión Principal para la acción de Presión en Pieza 4.	73
Figura 126. Desplazamiento global para la acción de Temperatura en Pieza 4.	74
Figura 127. Tensión de Von Mises para la acción de Temperatura en Pieza 4.	74
Figura 128. Tensión Principal para la acción de Temperatura en Pieza 4.	74
Figura 129. Desplazamiento global aplicando Fuerza Distribuida en Pieza 5.	75
Figura 130. Tensión de Von Mises aplicando Fuerza Distribuida en Pieza 5.	75
Figura 131. Tensión Principal aplicando Fuerza Distribuida en Pieza 5.	75
Figura 132. Desplazamiento global para la acción de Temperatura en Pieza 4.	76
Figura 133. Tensión de Von Mises para la acción de Temperatura en Pieza 5.	76
Figura 134. Tensión Principal para la acción de Temperatura en Pieza 5.	76



# RESUMEN

---

Actualmente, se utilizan herramientas de simulación FEM para la resolución de problemas ingenieriles en lugar de utilizar prototipos físicos que resultan muy costosos. El abanico comercial de programas es cada vez más extenso: NASTRAN, ANSYS, CATIA, ABAQUS, FEMAP, etc. El uso de un software u otro depende de muchos factores (facilidad de uso, variedad de herramientas...). Sin embargo, se disponen de pocos estudios que comparen la funcionalidad de dichos programas para simular una misma pieza, revelando si existe alguna diferencia en los resultados.

En el presente trabajo se realiza una comparativa entre el módulo FEM de CATIA V5 y ANSYS Workbench, ampliamente utilizados en la industria. De este modo, se definen bajo qué circunstancias (geometrías, cargas...) un software resulta más favorable que otro. Con ello, el proyecto ofrece una breve introducción del Método de los Elementos Finitos y de sus bases matemáticas, así como una descripción general de ANSYS Workbench y el módulo FEM de CATIA. Seguidamente, se describen de forma detallada las piezas bajo estudio y condiciones de simulación, para finalmente proporcionar los resultados y su discusión.

Con objeto de facilitar el cálculo, se han elegido piezas con geometrías sencillas para realizar el estudio: una placa cuadrada, un fragmento de tubería, una pieza soporte con taladros, la cabeza de un taladro, y una llanta de un vehículo. En cuanto a las solicitaciones, estas también son de carácter general: Presión, Cargas Puntuales y Acción de Temperatura.

Las variables bajo análisis son desplazamientos, tensión de Von Mises y tensión máxima principal. Tras obtener los resultados de la simulación en CATIA V5 y ANSYS Workbench, los resultados revelan que CATIA V5 proporciona resultados más bajos en términos de tensiones y desplazamientos, siendo más idónea su utilización cuando se desean sobredimensionar componentes en el lado de la seguridad. La discrepancia de las tensiones en un software respecto a otro es significativa; sin embargo, para conocer el orden de magnitud de estas, la selección de ANSYS Workbench o CATIA V5 resulta indiferente.

De forma general, ANSYS Workbench ofrece mayor potencial para modificar el mallado de los componentes. Asimismo, permite la simulación simultánea de varias solicitaciones independientes, agilizando el proceso. Este no es el caso de CATIA V5, que presenta otras limitaciones añadidas (el material ha de ser elástico y lineal, las deformaciones pequeñas, etc.). Por otra parte, CATIA V5 ofrece muchas más herramientas a la hora de modelar una pieza de carácter más complejo.



# 1 INTRODUCCIÓN

---

El Método de los Elementos Finitos es un método numérico empleado para resolver problemas complejos dentro del ámbito de la ingeniería. Se utiliza cuando la geometría de la pieza bajo estudio es complicada, las cargas que actúan sobre el dominio son poco convencionales y el comportamiento del material es complejo, no pudiendo obtenerse fácilmente una solución analítica.

Dicho método se utilizó primeramente en la industria aeroespacial. La NASA, alrededor de los años 60, fue pionera en implementar computacionalmente el método numérico de los elementos finitos, creando el famoso software NASTRAN (NASa STRuctural Analysis) [1]. Este software fue ampliamente utilizado para el diseño de sistemas mecánicos, haciendo posible la detección de anomalías antes de la fabricación del producto, reduciendo así notablemente los costes del proyecto en etapas posteriores al diseño.

Posteriormente, el Método de los Elementos Finitos se extrapola a otras disciplinas ingenieriles distintas al análisis estructural, como la mecánica de fluidos, la transferencia de calor, el estudio de campos electromagnéticos, la acústica y la biomecánica.

Hoy en día se dispone de multitud de softwares comerciales (ANSYS, ABAQUS, FEMAP...) que hacen uso de esta herramienta e, incluso, se combinan con el diseño (CAD) y la fabricación de piezas (CAM). Un ejemplo de ellos es el software CATIA V5.

El objetivo del presente proyecto es realizar un análisis comparativo entre el módulo de elementos finitos CATIA y ANSYS Workbench. Para ello, se simularán unas piezas de geometría sencilla aplicándoles unas cargas y unas condiciones de contorno. De esta forma, se puede desarrollar un estudio que determine bajo qué circunstancias (geometrías, cargas, etc.) es más válido o preciso utilizar un software u otro.

Para facilitar el entendimiento del lector, la estructura del presente trabajo se dividirá en las siguientes secciones: una breve descripción de las bases teóricas que comprenden la resolución de un problema de elementos finitos, una introducción de la interfaz de trabajo de ANSYS Workbench y CATIA, la descripción y análisis de las piezas sujetas a estudio, seguido de una comparativa de resultados y, finalmente, las conclusiones.



## 2 BASES MATEMÁTICAS DE UN SOFTWARE DE ELEMENTOS FINITOS

### 2.1 Descripción general de una herramienta de simulación de Elementos Finitos

Las herramientas de simulación son como una caja negra. Se ejecuta el programa proporcionando unos datos de partida (geometría, tipo de mallado, condiciones de contorno, propiedades del material...), y se obtienen unos resultados. En la mayoría de las ocasiones, los datos de salida adoptan una interfaz atractiva para el usuario. Un ejemplo es la representación de gráficos junto a una escala en colores (Figura 1).

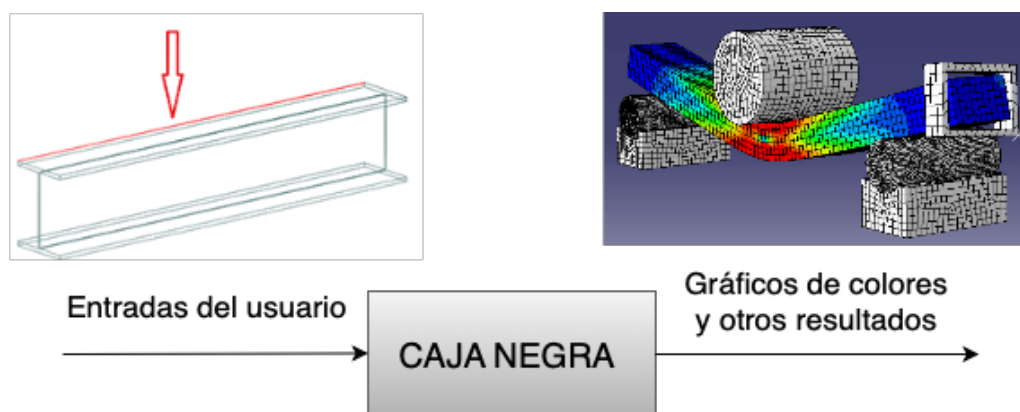


Figura 1. Esquema general de una herramienta de simulación.

Sin embargo, si no se conoce qué ocurre dentro de una herramienta de simulación como ANSYS o el módulo de elementos finitos de CATIA, pueden darse por válidos resultados que proporcionen una solución errónea.

A continuación, se va a proceder a describir qué hay exactamente dentro de la caja negra mostrada en la Figura 1. A dicha caja entran los datos definidos por el usuario del software de elementos finitos, que se basan en el problema físico bajo estudio (geometría, etc.). La herramienta de simulación utiliza estas entradas para averiguar cuál es el modelo matemático que se va a utilizar para resolver dicho problema. Esto implica que la herramienta no resuelve un problema físico en sí, sino un modelo matemático del problema físico, que está basado en algunos principios físicos clave. Finalmente, la herramienta obtiene una solución numérica de dicho modelo matemático definiendo unas variables específicas en unos puntos determinados del modelo [2].

Se debe enfatizar que el programa no calculará todas las variables del modelo matemático de forma directa, sino algunas variables seleccionadas. Por ejemplo, estas variables en la simulación mecánica de un sólido pueden ser los desplazamientos, o, en el caso de la simulación mecánica de un fluido, presión y velocidad. Asimismo, dichas variables no se definirán para todos los puntos del modelo, sino en aquellos que se han seleccionado de forma específica. Tras discretizar el dominio del sólido en pequeños elementos geométricos, estos puntos pueden ser esquinas, pueden estar situados en mitad de una cara, o estar definidos en el centro del elemento.

Todo lo demás se construye a partir de dichas variables seleccionadas en puntos determinados para el cálculo matemático, a través del módulo “post-processing”, común en todos los programas de elementos finitos.

Paralelamente, se pueden realizar cálculos sencillos a mano utilizando un modelo matemático aproximado o, en su defecto, datos empíricos a través de un modelo experimental. Dichas estimaciones son necesarias para determinar de antemano cuál será el rango de valores de las soluciones generadas en el programa de elementos finitos. La validación por medio de cálculos sencillos es cada vez más utilizada hoy día en las empresas, puesto que la tendencia es a minimizar o eliminar ensayos experimentales, siendo éstos una herramienta muy

cara para validar modelos. Un esquema en mayor detalle sobre los componentes de un programa de elementos finitos se muestra en la Figura 2.

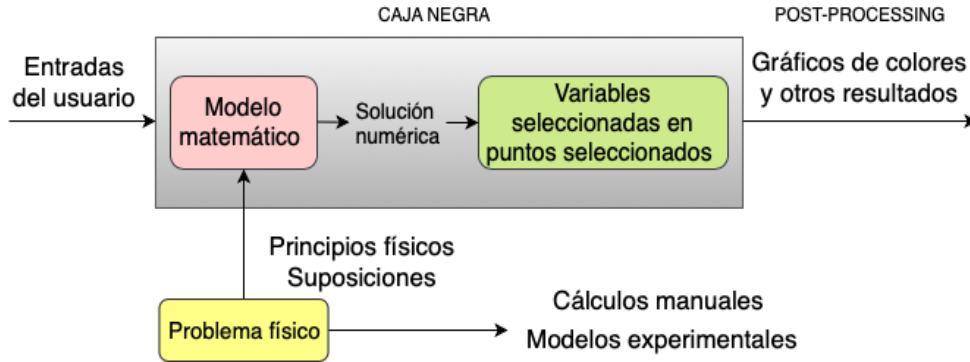


Figura 2. Esquema detallado de una herramienta de simulación [2].

## 2.2 Introducción al problema elástico

Para entender el análisis realizado sobre las piezas estudiadas en el presente trabajo, primero ha de conocerse cuáles son las ecuaciones fundamentales que se están resolviendo en el caso de un análisis estructural estático y lineal de un sólido 3D, es decir, las leyes y principios de la elasticidad 3D (Figura 3), quedando definido, de este modo, el modelo matemático que se va a emplear para el análisis. Si se quisiese hacer un análisis utilizando las ecuaciones de transferencia de calor, habría de elegirse otro modelo matemático distinto. Igual sucedería si se decidiese realizar un análisis fluido mecánico de los elementos bajo estudio.

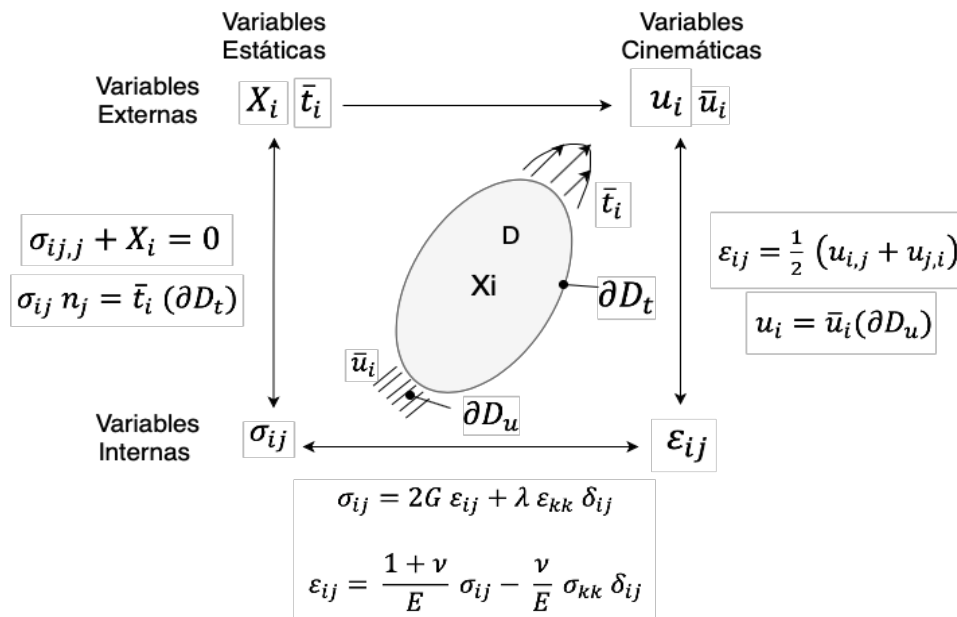


Figura 3. Esquema general del problema elástico [3].

En primer lugar, se va a proceder a realizar una descripción básica de los elementos que aparecen en dichas ecuaciones, para facilitar la comprensión del lector.

**Tensiones ( $\sigma$ ):** se miden en Pa (Sistema Internacional). Aislando un elemento infinitesimal de un sólido deformable 3D, en un punto definido por un vector normal, las componentes normales y tangenciales del tensor de tensiones se representan en la Figura 4.

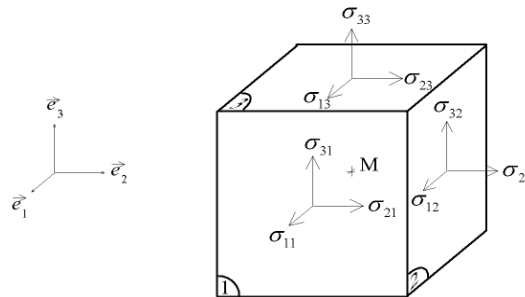


Figura 4. Componentes del tensor de tensiones en las caras vistas de un punto M de un sólido deformable 3D.

**Deformaciones ( $\epsilon$ ):** en sencillas palabras, una deformación es un desplazamiento relativo entre dos puntos de un sólido que están infinitamente próximos. Al igual que existen tensiones normales y tangenciales, existen deformaciones longitudinales y tangenciales. La *deformación longitudinal* entre dos puntos cualesquiera P y Q viene definida por [4]:

$$\epsilon_x(P) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\overline{P'Q'} - \overline{PQ}}{\overline{PQ}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_P$$

donde  $\overline{PQ}$  y  $\overline{P'Q'}$  es la distancia entre los puntos P y Q antes y después de la deformación respectivamente. Por otra parte, la *deformación tangencial* surge como consecuencia de someter a un sólido a una tensión tangencial  $\tau$  (Figura 5). La tangente del ángulo  $\gamma$ ,  $tg(\gamma)$ , puede obtenerse fácilmente mediante trigonometría básica. Si el ángulo es pequeño, utilizando las series de Taylor, la tangente coincidiría con el ángulo, es decir,  $tg(\gamma) \sim \gamma$ , donde  $\gamma$  sería la deformación tangencial. De forma general, para tres puntos cualesquiera (Figura 6), la deformación tangencial se definiría de la forma siguiente [4]:

$$\gamma = \lim_{P \rightarrow Q}^{R \rightarrow Q} (\widehat{RQP} - \widehat{R'Q'P'})$$

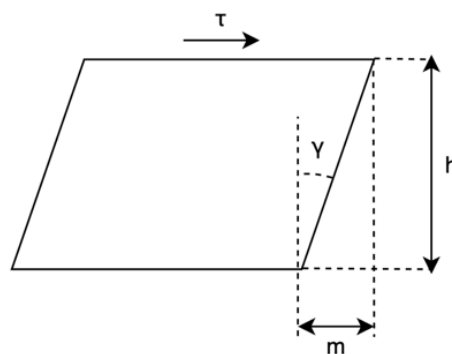


Figura 5. Sólido sometido a una tensión tangencial  $\tau$ .

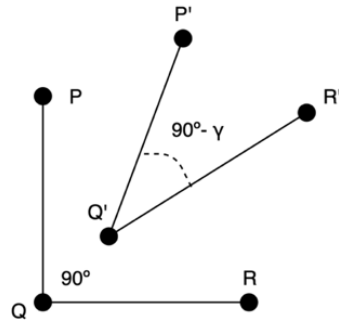


Figura 6. Tres puntos sometidos a una deformación tangencial.

Las tensiones y deformaciones se relacionan a partir de la curva tensión-deformación (Figura 7):

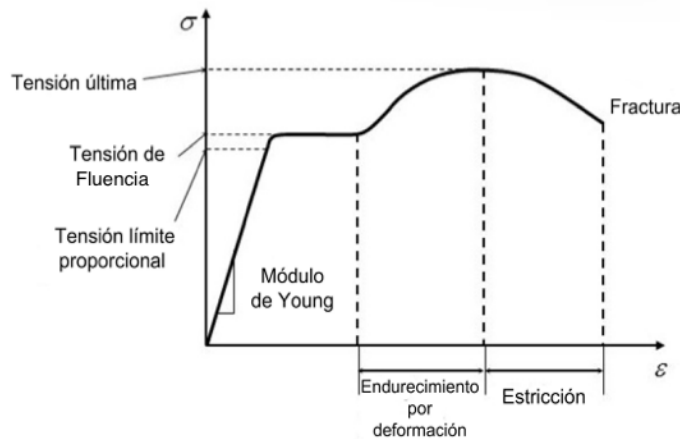


Figura 7. Curva tensión-deformación del ensayo normalizado de tracción para un acero convencional.

En el ensayo de tracción (Figura 8) se pueden definir la tensión y deformación instantáneas (ecuaciones 1 y 2), que varían en todo instante de tiempo  $t$ . Sin embargo, en ingeniería se utilizan la tensión y la deformación ingenieriles (ecuaciones 3 y 4), las cuales se pueden calcular a partir de las tensiones y deformaciones instantáneas por medio de las relaciones 5 y 6 [4]. Se utilizan las tensiones y deformaciones ingenieriles porque son más sencillas de emplear, ya que se realiza la aproximación de que el área final de la probeta es aproximadamente el área inicial.

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (1)$$

$$e = \int_{L_0}^L \frac{1}{l} dl = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right) \quad (2)$$

$$\sigma = \frac{F}{A_0} \quad (3)$$

$$e = \frac{L - L_0}{L_0} \quad (4)$$

$$\sigma = S(1 + e) \quad (5)$$

$$\varepsilon = \ln(1 + e) \quad (6)$$



**Módulo de Young (E):** Observando la curva tensión-deformación representada en la Figura 7, el módulo de Young puede definirse como la pendiente de la curva en el tramo de comportamiento elástico del material. Por tanto, puede definirse la siguiente relación (*ley de Hooke*):

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

**Módulo de Poisson (ν):** Si aplicamos una carga longitudinal F a la barra mostrada en la Figura 8 la longitud de la barra aumenta y su radio disminuye, conservándose el volumen. El coeficiente de Poisson determina cuánto se va a deformar la barra en dirección transversal respecto de su deformación longitudinal. De este modo, dicho coeficiente adopta la siguiente expresión [4]:

$$\varepsilon_T = -\nu \varepsilon_L$$

donde la deformación longitudinal ( $\varepsilon_L$ ) y transversal ( $\varepsilon_T$ ) serían  $\frac{\Delta L}{L}$  y  $\frac{\Delta a}{a}$  respectivamente.

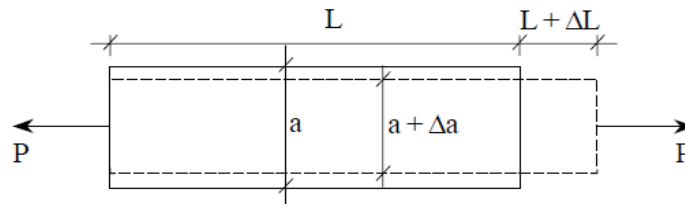


Figura 8. Barra sometida a una carga longitudinal en el extremo.

El conjunto de ecuaciones que se va a resolver no deja de ser un problema matemático diferencial. Hacen falta unas condiciones de contorno.

**Condiciones de contorno:** En cualquier condición de contorno el desplazamiento o la tracción tienen que ser conocidos [2].

- En desplazamientos ( $\bar{u}_i$ ): son condiciones de contorno esenciales. Se satisfacen de forma exacta.
- En tensiones ( $\bar{t}_i$ ): son condiciones de contorno naturales. No se satisfacen de forma exacta en el Análisis de Elementos Finitos.

**Fuerzas de dominio (Xi):** son fuerzas que actúan sobre el volumen del sólido. No son consecuencia del contacto directo con otros sólidos. Un ejemplo de fuerza de dominio es la fuerza de gravedad, las fuerzas de inercia, etc.

## 2.3 Ecuaciones fundamentales

### 2.3.1 Equilibrio

Tras haber puesto en situación al lector, se va a proceder a describir las ecuaciones fundamentales que se van a utilizar para resolver el problema elástico. Éstas son: Equilibrio (7), Compatibilidad (8) y Comportamiento. Las últimas se dividen, a su vez, en Ecuaciones de Lamé (9) y Ecuaciones de Hooke (10), dependiendo del método elegido para la resolución del problema elástico.

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad (7)$$

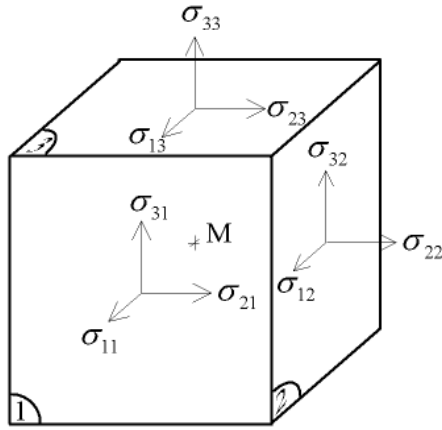
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (8)$$

$$\sigma_{ij} = 2G \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (9)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (10)$$

Con respecto a las ecuaciones de equilibrio, éstas se obtienen al aplicar la 1ª ley de Newton, conocida como la ley del “equilibrio estático”, sobre un elemento infinitesimal del dominio, suponiendo que la situación deformada coincide con la indeformada (pequeños desplazamientos) y que el sólido bajo estudio constituye un medio continuo (no discreto, es decir, sin considerar la microestructura atómica interna del material). Realizando, pues, un balance de fuerzas en un fragmento infinitesimal del dominio 3D (Figura 9), se obtienen las ecuaciones diferenciales de equilibrio en 3D [2]. Las tensiones normales y tangenciales en dichas ecuaciones son desconocidas, obteniendo 6 incógnitas ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ ) para 3 ecuaciones, por lo que son necesarias ecuaciones adicionales para cerrar el problema.

Trasladando las ecuaciones de equilibrio a un sólido 3D dividido en elementos finitos, dichos elementos no van a satisfacer equilibrio de forma independiente, pero sí el conjunto de dichos elementos [2].



$$F = m \cdot \vec{a}$$

$$\sum \vec{F}_i = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0$$

Figura 9. Ecuaciones diferenciales de Equilibrio en un fragmento infinitesimal del dominio.

### 2.3.2 Comportamiento

Se conoce que las tensiones y las deformaciones están relacionadas por medio de la ley constitutiva del material que, en el caso de un material elástico e isótropo, queda definida por 2 constantes únicamente, el módulo de Young “E” y el coeficiente de Poisson “ $\nu$ ”. El módulo de cizalladura (G) está relacionado con el módulo de Young, por lo que conociendo este último, se puede conocer el primero. En 3D el conjunto de relaciones para el modelo constitutivo para el caso de un material isótropo viene definido por [2]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - 2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - 2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - 2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Al añadir las 6 ecuaciones del modelo constitutivo, se acaban de añadir 6 incógnitas más en el modelo ( $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}$ ), por lo que se dispondrían de 9 ecuaciones 12 incógnitas; hay que añadir más ecuaciones para poder cerrar el problema, es decir, tener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.

La elección de un material u otro afectaría a la ley constitutiva, no a las ecuaciones de equilibrio o compatibilidad, que mantendrían su forma. El cambio de las ecuaciones constitutivas daría lugar a otras resoluciones dentro de la rama de la Mecánica de los Medios Continuos: Elasticidad no Lineal (Figura 10a), Plasticidad (Figura 10b), entre otros. En este proyecto se va a suponer que el material que se va a utilizar se va a comportar dentro del rango elástico y es de tipo isótropo (presenta el mismo comportamiento en todas las direcciones).

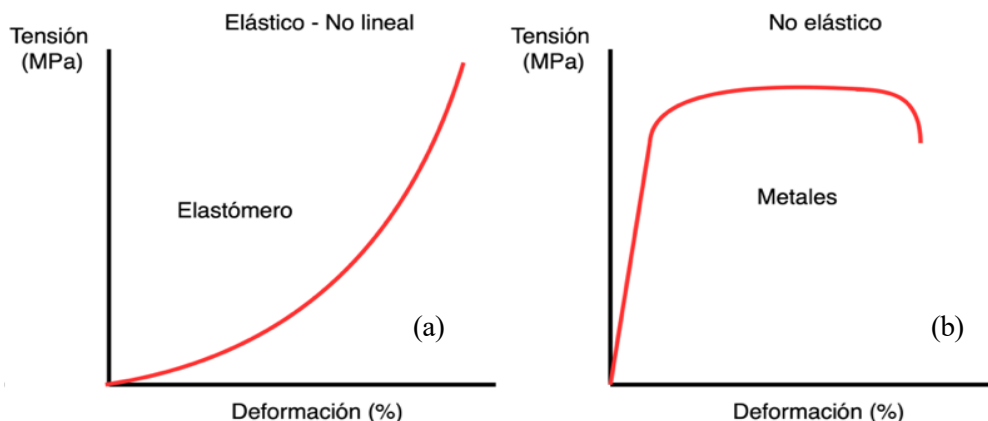


Figura 10. Curvas cualitativas tensión-deformación para distintos materiales.

### 2.3.3 Compatibilidad

Hasta el momento se han empleado las ecuaciones de equilibrio y comportamiento. Sin embargo, existe otro conjunto de relaciones que todavía no se han tenido en cuenta; las relaciones deformación-desplazamiento o compatibilidad. Las suposiciones que se han de realizar para la obtención de las ecuaciones de compatibilidad son pequeñas deformaciones, tanto normales como tangenciales. Las tensiones normales y tangenciales se relacionan con los desplazamientos de la siguiente forma [2]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

De esta forma, a las 12 incógnitas anteriores se añaden 3 más: los campos de desplazamientos  $u$ ,  $v$  y  $w$ . Sin embargo, acaban de añadirse 6 ecuaciones más al problema, disponiendo de un total de 15 ecuaciones para 15 incógnitas, quedando cerrado el problema matemático, es decir, el problema bajo estudio tiene solución.

En total existen 15 ecuaciones diferenciales en derivadas parciales acopladas. En el análisis con elementos finitos, los desplazamientos son incógnitas primarias, con las cuales pueden obtenerse las tensiones y deformaciones en términos del campo de desplazamientos (Elasticidad lineal 3D).

Las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales acopladas (también denominadas como “Forma Fuerte”) no son fáciles de resolver y puede que no haya soluciones clásicas para un problema en particular, especialmente en el caso de dominios complejos. Para superar las dificultades anteriores, se prefieren las denominadas “formulaciones débiles”.

La formulación débil de las ecuaciones diferenciales permite convertir el problema de cálculo diferencial formulado en términos de ecuaciones diferenciales en términos de un problema de álgebra lineal, utilizando un sistema finito de ecuaciones algebraicas [5]. Las formas débiles nunca dan soluciones completamente exactas debido a la reducción de los requisitos de suavidad (continuidad y derivabilidad) e imposición débil de las condiciones de contorno, a diferencia de las soluciones clásicas. Sin embargo, las formas débiles dan resultados relativamente precisos con el refinamiento de la malla, lo que hace que su resolución sea particularmente conveniente para las simulaciones de ingeniería; se obtendrá una solución incluso si no hay una solución ‘clásica’ [6].

## 2.4 Formulación débil del problema elástico

Antes de obtener la forma débil derivable del problema elástico se va a proceder a definir el concepto de desplazamiento virtual.

Suponiendo un cuerpo en equilibrio bajo la acción de fuerzas de volumen  $X_i$  y de superficie  $\bar{t}_i$ . El límite del cuerpo se va a dividir en  $\delta Du$  y  $\delta Dt$ , que representan la superficie donde se aplican las condiciones de contorno en desplazamientos y tensiones, respectivamente. Asimismo, se asume que el problema tiene solución, es decir, existe un campo de desplazamientos  $\bar{u}$  que satisface las ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y comportamiento.

Sea  $\tilde{u} = u + \delta u$  un campo de desplazamientos arbitrario que satisface las condiciones de contorno en desplazamientos, es decir:

$$\tilde{u} = \bar{u} \quad \text{en } \delta Du$$

Lo que implica que

$$\delta u = 0 \quad \text{en } \delta Du$$

Además,  $\delta u$  ha de ser lo suficientemente suave (esto es, continuo y con derivadas parciales continuas hasta un orden suficientemente grande) y su magnitud lo suficientemente pequeña como para que el material se mantenga en el rango elástico. De este modo, un desplazamiento arbitrario  $\delta u$  que cumpla todas las condiciones anteriores se denominará desplazamiento virtual [7].

Definido el concepto de desplazamiento virtual, se va a proceder a obtener la forma débil derivable del principio de los trabajos virtuales para la resolución simplificada del problema de Elementos Finitos para el caso de un cuerpo elástico y lineal sometido a un análisis estructural estático.

Suponiendo un cuerpo en equilibrio bajo la acción de fuerzas de volumen  $X_i$  y de superficie  $\bar{t}_i$ , se aplica equilibrio en todo el sólido:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0$$

Las condiciones de contorno son:

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{en } \delta Du$$

$$\sigma_{ij} \cdot n_j = \bar{t}_i \quad \text{en } \delta Dt$$

Multiplicando la ecuación de equilibrio por el desplazamiento virtual  $\delta u$  e integrando en todo el volumen se obtiene:

$$\int_V \sigma_{ij,j} \cdot \delta u_i \, dV = \int_V -X_i \cdot \delta u_i \, dV \quad (11)$$

donde el término a la derecha de la igualdad representa el trabajo virtual de las fuerzas de volumen  $X_i$  debido a los desplazamientos virtuales  $\delta u_i$ .

El término a la izquierda de la igualdad puede reescribirse de la forma siguiente:

$$\int_V \sigma_{ij,j} \cdot \delta u_i \, dV = \int_V (\sigma_{ij} \cdot \delta u_i)_j \, dV - \int_V \sigma_{ij} \cdot \delta u_{i,j} \, dV$$

De esta forma, la ecuación (11) quedaría:

$$\int_V (\sigma_{ij} \cdot \delta u_i)_j dV - \int_V \sigma_{ij} \cdot \delta u_{i,j} dV = \int_V -X_i \cdot \delta u_i dV \quad (12)$$

Sobre el término  $(\sigma_{ij} \cdot \delta u_i)_j dV$  a la izquierda de la igualdad se va a proceder a aplicar el teorema de Gauss para transformar la integral de volumen en integral de superficie [7]:

$$\int_V (\sigma_{ij} \cdot \delta u_i)_j dV = \int_S \sigma_{ij} \cdot \delta u_i n_j \cdot dS = \int_S (\sigma_{ij} \cdot n_j) \cdot \delta u_i dS$$

Asimismo, se conoce que  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$  en  $\delta \mathbf{Du}$  (definición de desplazamiento virtual). De este modo, la ecuación anterior se simplifica:

$$\begin{aligned} \int_S (\sigma_{ij} \cdot n_j) \cdot \delta u_i dS &= \int_{S_u} (\sigma_{ij} \cdot n_j) \cdot 0 dS + \int_{S_\sigma} (\sigma_{ij} \cdot n_j) \cdot \delta u_i dS \\ \int_S (\sigma_{ij} \cdot n_j) \cdot \delta u_i dS &= \int_{S_\sigma} (\sigma_{ij} \cdot n_j) \cdot \delta u_i dS \end{aligned}$$

Introduciendo la condición de contorno en tensiones en la ecuación anterior se obtiene:

$$\int_{S_\sigma} (\sigma_{ij} \cdot n_j) \cdot \delta u_i dS = \int_{S_\sigma} \bar{t}_i \cdot \delta u_i dS$$

que representaría el trabajo virtual de las tensiones superficiales  $\bar{\mathbf{t}}_i$  debidas a un desplazamiento virtual  $\delta \mathbf{u}_i$ . La ecuación (12) quedaría:

$$\int_{S_\sigma} \bar{\mathbf{t}}_i \cdot \delta \mathbf{u}_i dS - \int_V \sigma_{ij} \cdot \delta u_{i,j} dV = \int_V -X_i \cdot \delta u_i dV$$

Por simetría del tensor de tensiones  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , y utilizando la expresión general de las ecuaciones de compatibilidad, el término a la izquierda de la igualdad puede reescribirse [7] en:

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{ij} \cdot \delta u_{i,j} dV &= \frac{1}{2} \cdot \left( \int_V \sigma_{ij} \cdot \delta u_{i,j} dV + \int_V \sigma_{ji} \cdot \delta u_{i,j} dV \right) = \frac{1}{2} \cdot \left( \int_V \sigma_{ij} \cdot \delta u_{i,j} dV + \int_V \sigma_{ij} \cdot \delta u_{j,i} dV \right) \\ &= \int_V \sigma_{ij} \cdot \frac{\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}}{2} dV = \int_V \sigma_{ij} \cdot \delta \varepsilon_{ij} dV \end{aligned}$$

que representaría el trabajo virtual de  $\sigma_{ij}$  debido a los desplazamientos virtuales  $\delta \mathbf{u}_i$ , que provocarían la deformación virtual  $\delta \varepsilon_{ij}$ .

Finalmente, el teorema de los trabajos virtuales adoptaría la siguiente forma:

$$\int_{S_\sigma} \bar{\mathbf{t}}_i \cdot \delta \mathbf{u}_i dS - \int_V \sigma_{ij} \cdot \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V -X_i \cdot \delta u_i dV$$

Reordenando términos para que todos los términos de la ecuación sean positivos:

$$\int_V \sigma_{ij} \cdot \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_{S_\sigma} \bar{\mathbf{t}}_i \cdot \delta \mathbf{u}_i dS + \int_V \mathbf{X}_i \cdot \delta \mathbf{u}_i dV \quad (13)$$

Esta expresión es conocida como Principio de los Trabajos Virtuales (PTV). Éste puede enunciarse de la

forma siguiente [7]: para un cuerpo en equilibrio sujeto a desplazamientos virtuales (admisibles, arbitrarios), el trabajo realizado por las fuerzas externas (tracciones  $\bar{t}_i$  y fuerzas de dominio  $X_i$ ) es igual al trabajo realizado por los esfuerzos internos (tensiones  $\sigma_{ij}$ ).

## 2.5 Pasos del método

Tras haber puesto en situación al lector, se va a proceder a describir de forma general las distintas etapas en la resolución de un software de elementos finitos.

### 2.5.1 Selección de un modelo matemático apropiado y definición de las propiedades mecánicas

Conocida la realidad física del problema, condiciones de contorno y cargas aplicadas, hay que decidir qué teoría utilizar para analizar la estructura, es decir, el modelo matemático adecuado para el cálculo numérico (PTV en este proyecto). Dicho modelo se compone de las ecuaciones fundamentales definidas en un dominio, determinado por la geometría de la pieza. Adicionalmente se deben definir las propiedades de los materiales de la estructura para poder trabajar con el modelo elegido (módulo de elasticidad, coeficiente de Poisson, densidad...) [8].

Para problemas de valores de contorno arbitrarios (geometrías complejas...), la ecuación (13) no tiene solución analítica. Para evitar esto, en lugar de buscar funciones continuas para el campo de desplazamientos en todo el dominio, se buscará la solución en los nodos de los elementos y se interpolará la geometría y los desplazamientos entre los nodos [9].

### 2.5.2 Discretizar el dominio

Para interpolar la geometría, primero hay que dividir el dominio en elementos (Figura 11), es decir, mallar. Para poder pasar del medio continuo al medio discreto, se utilizan unas funciones de interpolación (llamadas también funciones de forma), de modo que nos permitan conocer el valor de cualquier parámetro en el interior del elemento a partir de los valores en los nodos [10].

Para interpolar los grados de libertad en los nodos de cada elemento se introduce el concepto de Función de Forma. Se define una función de forma  $N$  para cada nodo del elemento, por lo que se hablará de función de forma del nodo  $i$  para el elemento  $e$ , es decir,  $N_i^{(e)}$ . Cada función de forma se caracteriza por valer la unidad en el nodo y cero en el resto de los nodos (Figura 12).

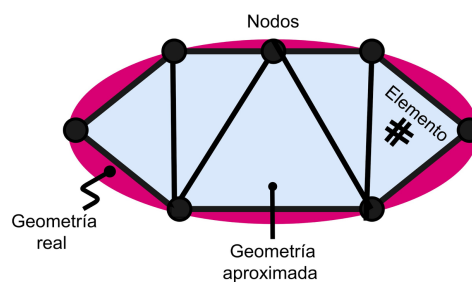


Figura 11. Discretización del dominio en elementos.

La interpolación de los grados de libertad en los nodos de cada elemento [9] sería de la forma:

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = N x_a$$

donde  $x$  es un punto cualquiera del elemento definido por unas coordenadas nodales  $x_a$ .

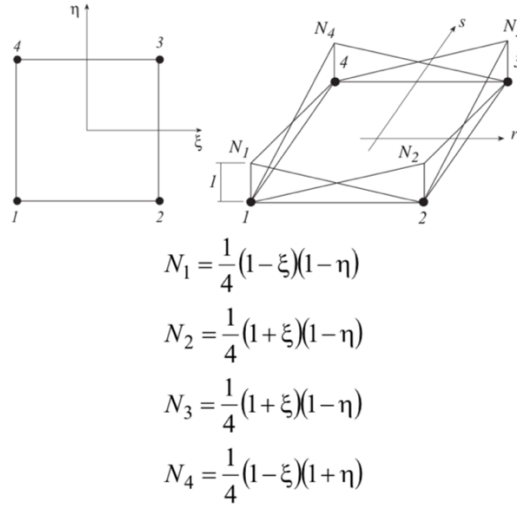


Figura 12. Funciones de forma para el caso de un elemento rectangular lagrangiano y lineal [11].

### 2.5.3 Selección de una interpolación apropiada o modelo de desplazamiento

Como se ha comentado, en estructuras complejas, la solución de los desplazamientos bajo cargas específicas no es predecible de forma exacta, por lo que se asume una solución adecuada dentro del elemento para aproximar la solución desconocida. Esta solución debe ser simple desde el punto de vista computacional y satisfacer los requerimientos de convergencia. Generalmente, el modelo de interpolación suele ser un polinomio [12].

Los desplazamientos internos del elemento ( $u$ ) se interpolan mediante los desplazamientos nodales ( $d$ ) de la siguiente forma [9]:

$$u = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = Nd$$

Si la geometría y los desplazamientos son interpolados mediante las mismas funciones de forma, el elemento será denominado *isoparamétrico*.

A partir de los desplazamientos pueden obtenerse las deformaciones en cualquier punto del elemento, utilizando la definición de deformación [9]:

$$\varepsilon = \partial Nd = Bd$$

donde  $\mathbf{B}$  es la matriz que contiene la derivada de las funciones de forma  $\mathbf{N}$ .

### 2.5.4 Derivación de las matrices de rigidez y vectores de carga

Las interpolaciones introducidas se utilizarán para discretizar las ecuaciones fundamentales. Como se explicó con anterioridad, se utilizará la forma débil del problema elástico, es decir, el Principio de los Trabajos Virtuales.

Suponiendo que el equilibrio del elemento solo se consigue en los nodos, se definen unas fuerzas puntuales sobre los nodos, denominadas fuerzas nodales de equilibrio, que equilibren las fuerzas debidas a la deformación del elemento y al resto de las fuerzas que actúan sobre el mismo [8].

En notación matricial el PTV adquirirá la siguiente forma [9]:

$$\int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV = \int_{s_\sigma} \delta u^T \phi dS + \int_V \delta u^T b dV + \delta d^T q$$

donde  $\phi$ ,  $b$  y  $q$  representan los vectores de fuerzas nodales de superficie, volumen y equilibrio respectivamente.

Introduciendo el campo de desplazamientos y deformaciones interpolado en cada elemento se obtiene:

$$\int_V \delta d^T B^T \sigma dV = \int_{s_\sigma} \delta d^T N^T \phi dS + \int_V \delta d^T N^T b dV + \delta d^T q$$

Donde  $\delta d^T$  es común en todos los miembros de la ecuación. De esta forma, la expresión anterior se simplificaría en:

$$\int_V B^T \sigma dV = \int_{s_\sigma} N^T \phi dS + \int_V N^T b dV + q \quad (14)$$

Por otra parte, el término a la izquierda de la igualdad se puede reescribir mediante la Ley de Hooke. Dicha ley, en forma matricial, se expresa como [8]:

$$\sigma = C(\varepsilon - \varepsilon_o) + \sigma_o$$

donde  $C$  es la matriz elástica. Las tensiones y deformaciones iniciales,  $\sigma_o$  y  $\varepsilon_o$  respectivamente, se van a considerar nulas. Así, la expresión se simplifica en:

$$\sigma = C\varepsilon = CBd^e \quad (15)$$

Introduciendo (15) en (14) se obtendría lo siguiente:

$$\int_V B^T CB dV d^e = \int_{s_\sigma} N^T \phi dS + \int_V N^T b dV + q$$

donde la Matriz de Rigidez Elemental  $k^{(e)}$  y el vector equivalente nodal de cargas  $f^{(e)}$  vienen dados por [9]:

$$k^{(e)} = \int_V B^T DB dV \quad f^{(e)} = \int_{s_\sigma} N^T \phi dS + \int_V N^T b dV$$

De este modo, la **expresión matricial de PTV** quedaría:

$$k^{(e)} d^{(e)} = f^{(e)} + q^{(e)}$$

Para entender este paso del método se va a proponer el siguiente ejemplo (Figura 13) [13]:

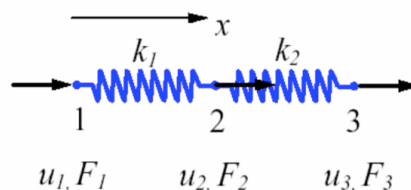


Figura 13. Dos muelles conectados en paralelo bajo la acción de una fuerza.



De forma general, la relación entre la fuerza  $f$  y el desplazamiento  $\delta$  en régimen lineal para un resorte de nodos inicial y final  $i$  y  $j$  respectivamente será:

$$f = k \cdot \delta \text{ donde } \delta = u_j - u_i$$

donde  $k$  es la rigidez del elemento o la constante elástica del resorte.

Haciendo equilibrio de fuerzas internas en los nodos para el elemento de constante elástica  $k_1$ :

$$\text{Nodo 1: } f_1^1 = -k_1 \cdot (u_2 - u_1) = k_1 u_1 - k_1 u_2$$

$$\text{Nodo 2: } f_2^1 = k_1 \cdot (u_2 - u_1) = -k_1 u_1 + k_1 u_2$$

Haciendo equilibrio de fuerzas internas en los nodos para el elemento de constante elástica  $k_2$ :

$$\text{Nodo 2: } f_2^2 = -k_2 \cdot (u_3 - u_2) = k_2 u_2 - k_2 u_3$$

$$\text{Nodo 3: } f_3^2 = k_2 \cdot (u_3 - u_2) = -k_2 u_2 + k_2 u_3$$

Expresando las ecuaciones anteriores en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2^2 \\ f_3^2 \end{Bmatrix}$$

Los términos  $f_2^1$  y  $f_2^2$  representan las fuerzas internas locales del nodo 2 actuando en el elemento 1 y 2 respectivamente.

## 2.5.5 Ensamblar ecuaciones elementales

La ecuación de equilibrio global de la malla se obtiene estableciendo que la suma de fuerzas nodales de equilibrio en cada nodo debe ser igual a la fuerza nodal exterior [8], es decir:

$$\sum_e q_i^{(e)} = p_j$$

$$\sum_e k_i^{(e)} d_i^{(e)} - f_i^{(e)} = p_j$$

donde el sumatorio representa el conjunto de vectores de fuerzas nodales de equilibrio de los distintos elementos que comparten el nodo de número global  $j$ , y  $p_j$  es el vector de fuerzas puntuales exteriores en dicho nodo.

Las matrices de rigidez y vectores de cargas elementales se ensamblan en la matriz de rigidez global  $K$  y el vector de cargas  $F$ , respectivamente. En el ejemplo anterior, el acoplamiento se haría de la forma siguiente [13]:

Considerando la condición de equilibrio estático de fuerzas, es decir,  $F_{\text{externas}} = F_{\text{internas}}$ , se obtiene

$$\text{Nodo 1: } f_1^1 = F_1$$

$$\text{Nodo 2: } f_2^1 + f_2^2 = F_2$$

$$\text{Nodo 3: } f_3^2 = F_3$$

Escribiendo de forma conjunta las ecuaciones anteriores en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

En notación matricial simplificada:

$$[K]\{u\} = \{F\}$$

La matriz de rigidez global  $[K]$  es simétrica y si es singular (su determinante es cero) representaría el movimiento del sistema como sólido rígido.

### 2.5.6 Incorporar las condiciones de contorno

Las condiciones de contorno restringen el problema para evitar el movimiento como sólido rígido.

### 2.5.7 Resolución del sistema de ecuaciones

La principal dificultad en los cálculos es la resolución de las integrales. Abordar el problema de forma directa será prácticamente imposible en la mayoría de los casos, por lo que se recurre a la integración numérica. El método más popular y usado en el ámbito de los elementos finitos es la cuadratura de Gauss-Legendre [8].

La integración numérica consiste en sustituir la función que se pretende integrar por un polinomio de interpolación (otra función de forma) que pase por un determinado número de puntos llamados puntos de cuadratura de Gauss [14]. De esta forma, el problema se reduciría a determinar el valor del desplazamiento únicamente en los puntos de cuadratura. Luego, el programa procedería a realizar una extrapolación del valor de los desplazamientos trasladando los resultados de los puntos de cuadratura a los nodos del elemento (Figuras 14 y 15).

El teorema de cuadratura de Gauss-Legendre establece que la siguiente aproximación es exacta siempre que  $f$  sea un polinomio de grado al menos  $2n-1$  [15] [16]:

$$\int_{-1}^1 f(x) \cdot dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot A_i$$

donde  $x_i$  son los puntos de cuadratura y  $A_i$  son los pesos de esos puntos. La posición y los pesos de cuadratura (Tabla 1) se calculan por medio de los polinomios de Legendre.

Tabla 1. Nodos y pesos de cuadratura gaussiana.

n	Nodos: $x_i$	Pesos: $A_i$
1	0	2
2	$\pm 0.5773502692$	1
3	$\pm 0.7745966692$ 0.0	0.5555555556 0.8888888889

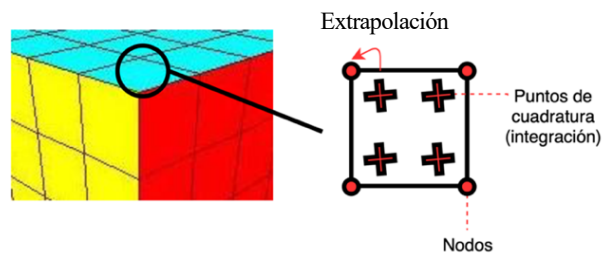


Figura 14. Nodos y puntos de cuadratura en un elemento.

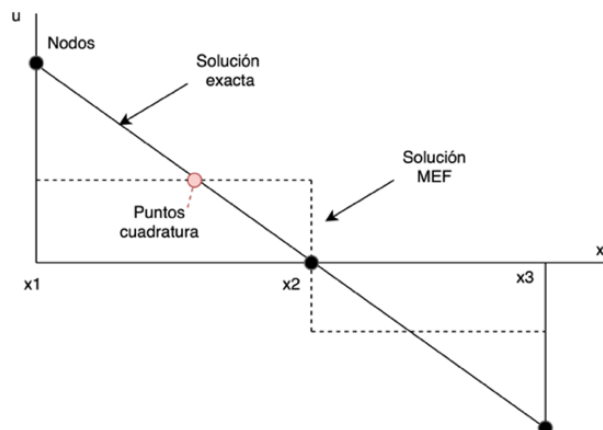


Figura 15. Solución aproximada y analítica en los nodos tras extrapolación.

## 2.5.8 Post-processing

Una vez obtenidos los resultados, estos se tienen que interpretar, siendo para ello muy útil utilizar técnicas gráficas.

## 2.5.9 Validación de los resultados

Si, una vez terminado el proceso, el analista cree que alguna de las etapas anteriores tiene algún error, ya sea por mala elección de la teoría de cálculo, una malla inapropiada o cualquier otro aspecto, éste puede hacer las modificaciones pertinentes y repetir los pasos que sigan hasta alcanzar la fase final [8] (Figura 16).

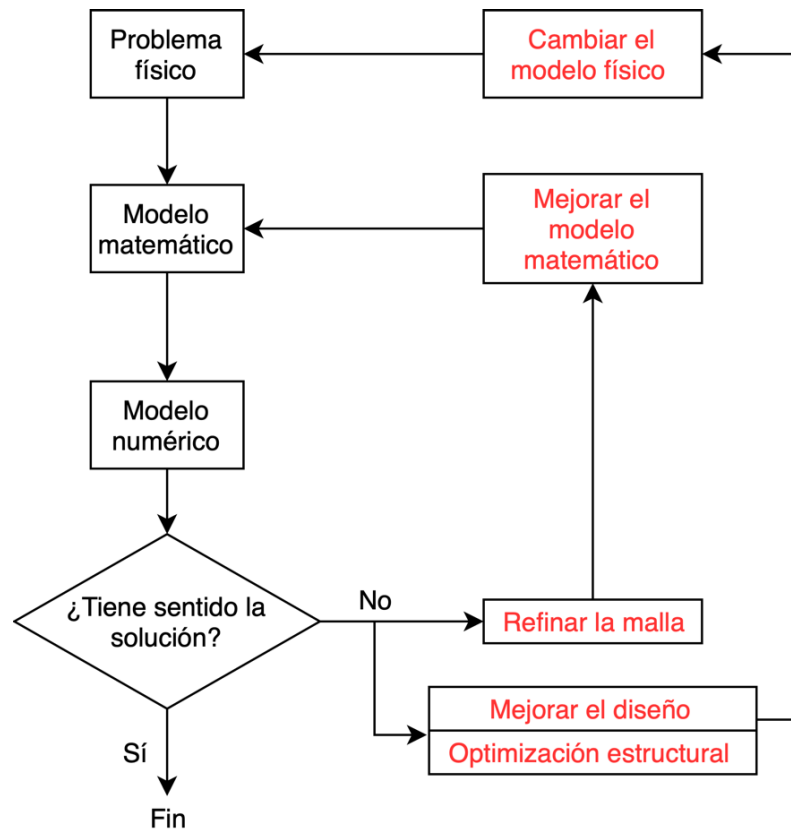


Figura 16. Diagrama de flujo de la resolución de un problema mediante MEF [17].

# 3 DESCRIPCIÓN GENERAL DE ANSYS WORKBENCH V19

---

## 3.1 Introducción

En la actualidad existen muchos programas de cómputo que permiten realizar diversas tareas de forma eficiente, especialmente en el ámbito de la ingeniería. En el dominio ingenieril, dichos programas están normalmente destinados al cálculo matemático, simulación y diseño de piezas o componentes estructurales [18].

ANSYS es un software de propósito general, utilizado para simular interacciones en todas las disciplinas de la física, ingeniería estructural, vibraciones, dinámica de fluidos, transferencia de calor y electromagnetismo. Dicho software se emplea para predecir cómo reacciona un objeto determinado bajo un entorno real de carga.

En efecto, se trata de un entorno software que continuamente desarrolla nuevas tecnologías enfocadas en la simulación y, con el paso de los años, ha ido adquiriendo otros softwares para ofrecer un paquete de aplicaciones suficientemente completo, donde pueda unificarse la resolución de problemas ingenieriles complejos.

Hasta hace unos años, el uso del software de elementos finitos ANSYS Mechanical APDL (Ansys Parametric Design Language) estaba ampliamente generalizado. Sin embargo, en los últimos años, gran parte de los usuarios están optando por la utilización de ANSYS Workbench. Esta plataforma de software combina gráficamente el modelado de sólidos, así como la simulación y la optimización de modelos físicos [18].

Workbench mejora considerablemente la interfaz gráfica con respecto a ANSYS APDL, permitiendo obtener geometrías directamente desde el programa de forma sencilla. Asimismo, Workbench proporciona un entorno fácil de aprender y manejar. Sin embargo, los usuarios de APDL utilizan este módulo por medio de línea de comandos, lo cual es mucho más conveniente para hacer bucles y repetir acciones (como ejecutar cientos de casos de carga y escribir automáticamente los resultados de cada conjunto). Es importante enfatizar que Workbench también hace uso de las líneas de comandos utilizadas en APDL, ya que esta plataforma implementa parte de la tecnología desarrollada anteriormente.

A continuación, se va a proceder a describir la interfaz y flujo de trabajo de ANSYS Workbench V19.

## 3.2 Entorno general de trabajo

La interfaz de trabajo se divide en dos áreas principales: la caja de herramientas y el esquema de proyectos (Figura 17).

- La caja de herramientas permite seleccionar el tipo de análisis a realizar (Estructural Estático, Eléctrico...), es decir, el conjunto de ecuaciones matemáticas para simular el modelo físico bajo estudio.
- El esquema de proyecto es el área de la interfaz que va a controlar el proyecto que se esté creando y editando.

Asimismo, existe una barra de herramientas en la esquina superior izquierda con las funciones más utilizadas (File, View, Tools, Units...).

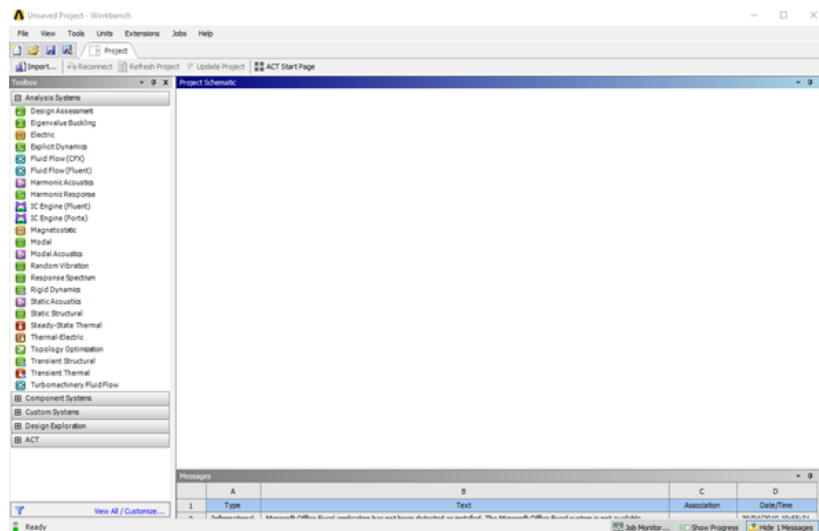


Figura 17. Vista general del entorno de trabajo.

Para iniciar un nuevo análisis, se selecciona un tipo de sistema en la caja de herramientas. Para ello, se arrastra el sistema o plantilla al esquema de proyecto. Otra opción es hacer doble clic sobre el sistema que se va a utilizar. En cualquier caso, un bloque del sistema de análisis aparece en el esquema del proyecto (Figura 18).

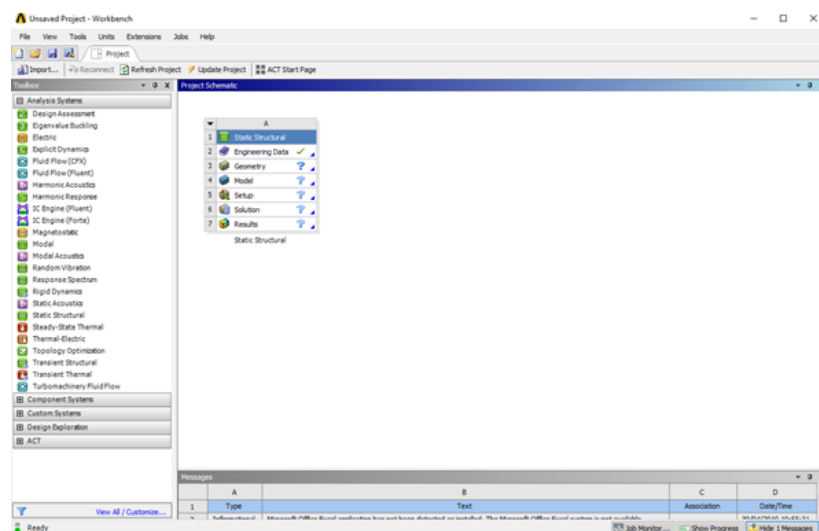


Figura 18. Entorno de trabajo con un bloque de análisis.

Cada bloque posee un número de celdas numeradas y necesarias para completar el análisis (Figura 19). La numeración indica el orden en que deben completarse las células. En la parte derecha de la célula aparece un indicador para ver si ésta está correctamente configurada o no. El signo de interrogación indicaría que no se han introducido suficientes datos. En el caso de un análisis Estructural Estático, se observa que los datos ingenieriles ya aparecen cargados por defecto, pero el modelo geométrico está todavía por definir.

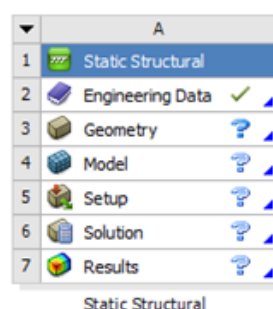


Figura 19. Bloque de sistema.

El material por utilizar en el modelo se puede modificar mediante la celda ‘Engineering Data’. Asimismo, se pueden crear nuevos materiales en el caso de que se quieran emplear varios modelos constitutivos en diferentes zonas de una pieza. La interfaz para crear e introducir las propiedades del material se muestra en la Figura 20.

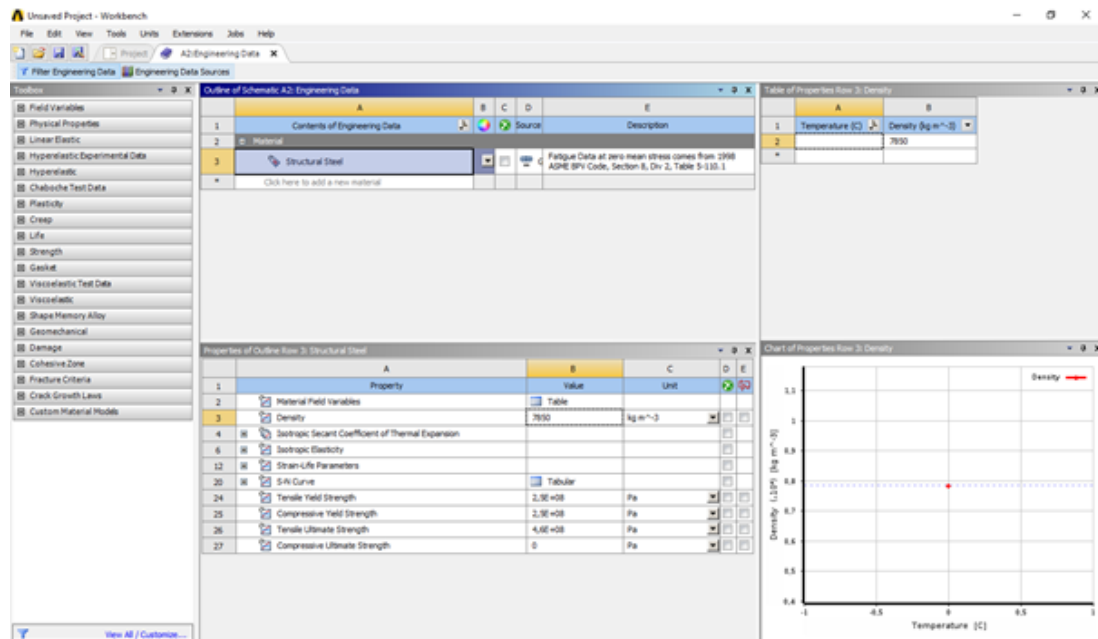


Figura 20. Interfaz del módulo “Engineering Data”.

Haciendo clic derecho sobre la celda de geometría se despliega un menú contextual a través de los módulos de diseño DesignModeler o SpaceClaim. (Figura 21).

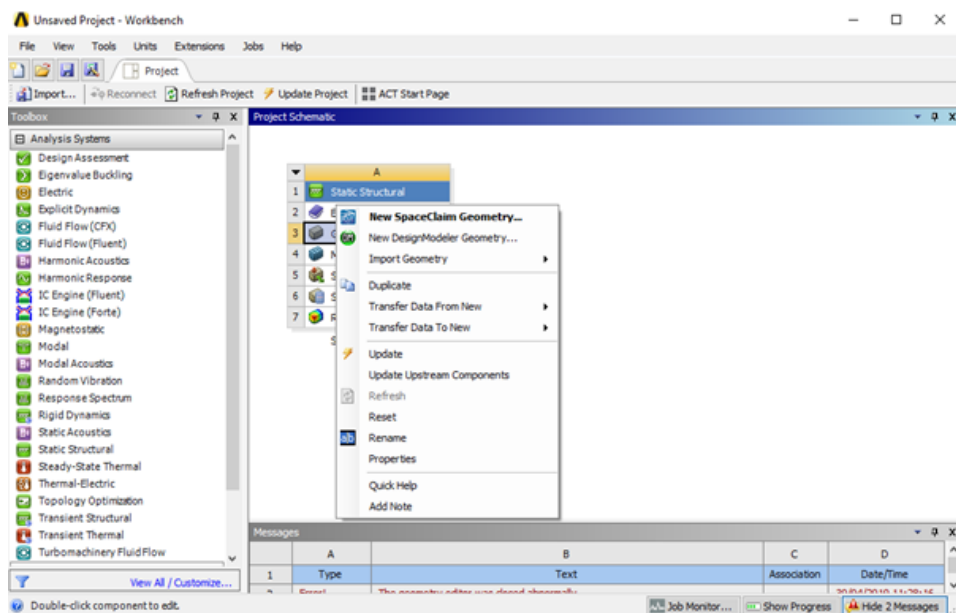


Figura 21. Menú contextual de la celda geometría.

DesignModeler es una herramienta convencional para modelar piezas. No permite algunas herramientas inteligentes como copiar, pegar, etc. Asimismo, la interfaz de trabajo es bastante lenta y se necesita presionar la opción “generar” regularmente después de utilizar cada herramienta (Figura 22). De forma general, el modelado se realiza con mayor lentitud (a diferencia de SpaceClaim) pero resulta ideal para geometrías sencillas y piezas básicas.

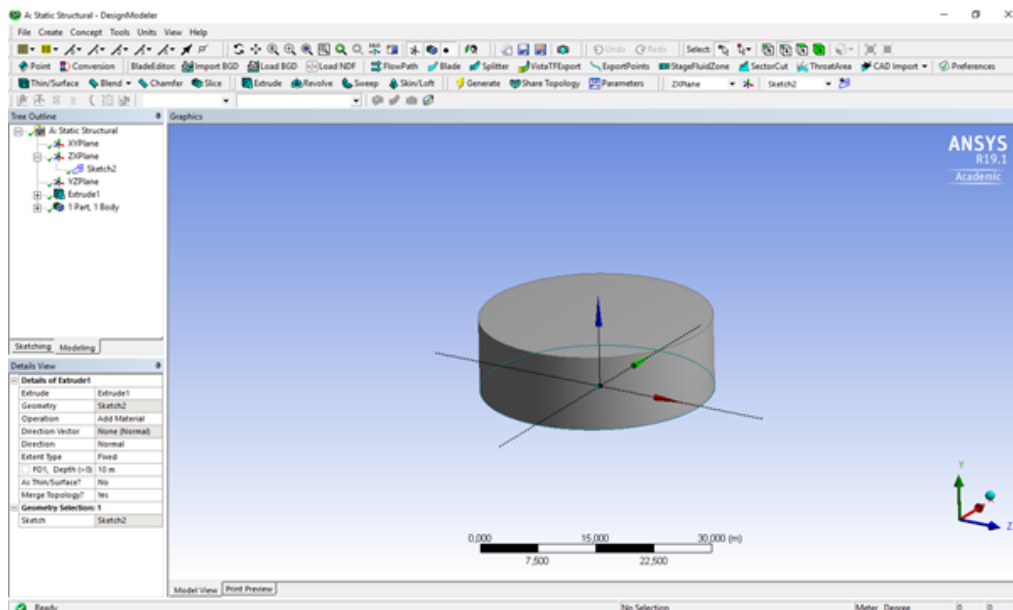


Figura 22. Interfaz de trabajo en DesignModeler.

Por otra parte, SpaceClaim es una herramienta de modelado más avanzada con una interfaz gráfica de usuario más moderna que la que se encuentra presente en DesignModeler (Figura 23). Consta de herramientas inteligentes como deshacer, copiar y pegar, entre otras, siendo el abanico de comandos bastante amplio. En cualquier caso, los comandos más básicos permiten realizar aproximadamente el 80% de la geometría de una pieza de complejidad media. Asimismo, SpaceClaim cambia las vistas de forma muy eficiente y es una herramienta ideal para geometrías de mayor complejidad.

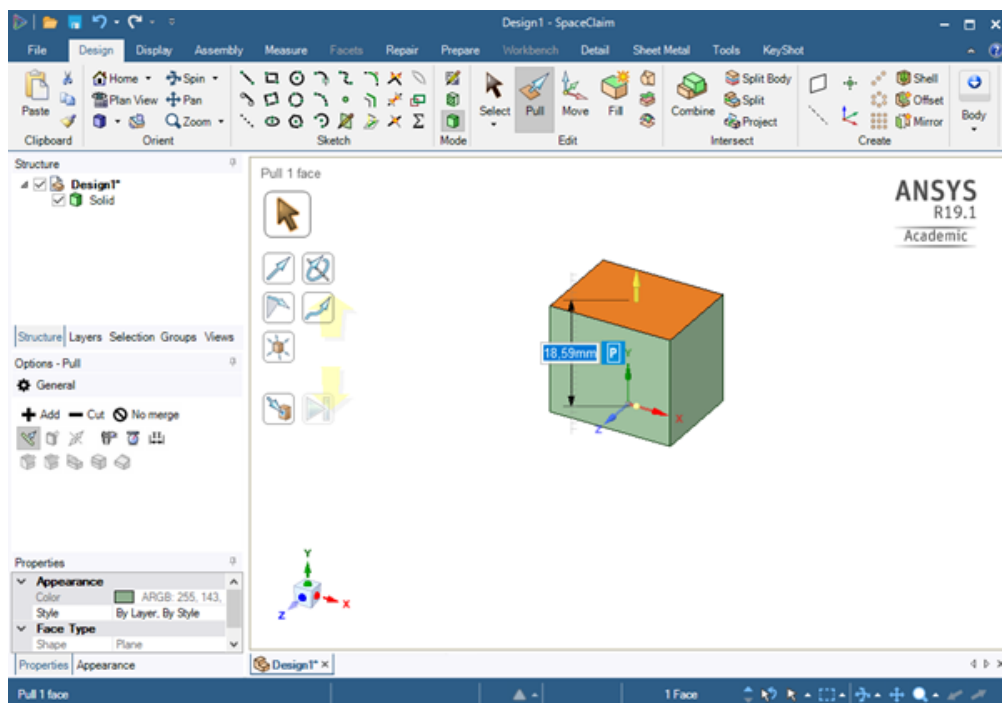


Figura 23. Interfaz de trabajo en SpaceClaim.

Otra opción es importar directamente la geometría en el software. En este caso, se va a proceder a importar una de las piezas que se van a utilizar posteriormente en el análisis. Para ello, se carga el archivo con la geometría de la pieza en formato 'igs' (Figura 24).



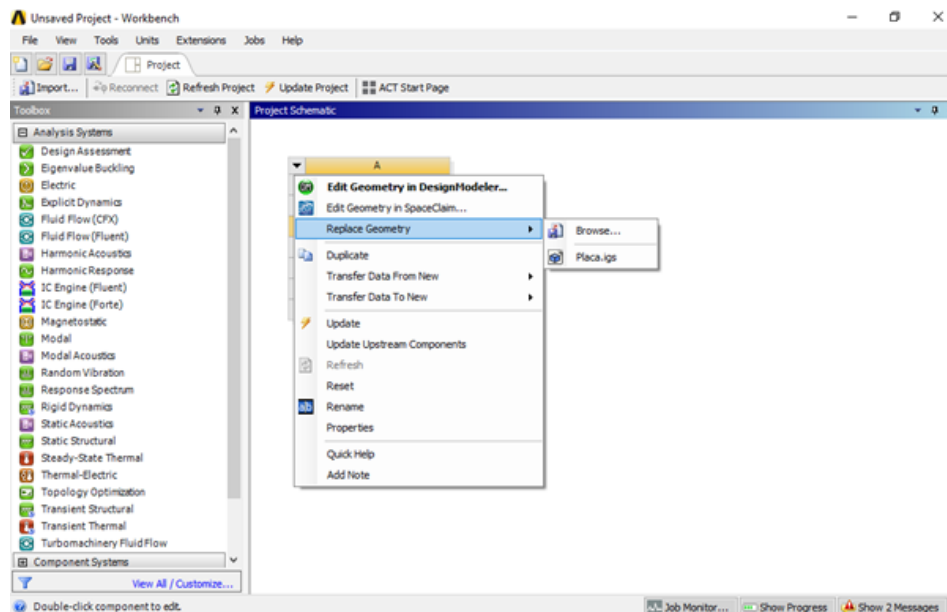


Figura 24. Menú contextual de “Replace Geometry” en la celda de geometría.

El resto de las celdas se van a describir al mismo tiempo que se realiza un ejemplo guiado, para facilitar la comprensión del lector.

### 3.3 Ejemplo guiado

La pieza por simular en este ejemplo va a someterse posteriormente a un análisis comparativo entre los programas ANSYS Workbench y el módulo de simulación de CATIA V5. Se trata de una placa cuadrada que ha sido importada directamente al programa (Figura 25). Dicha pieza fue creada por medio de CATIA V5.

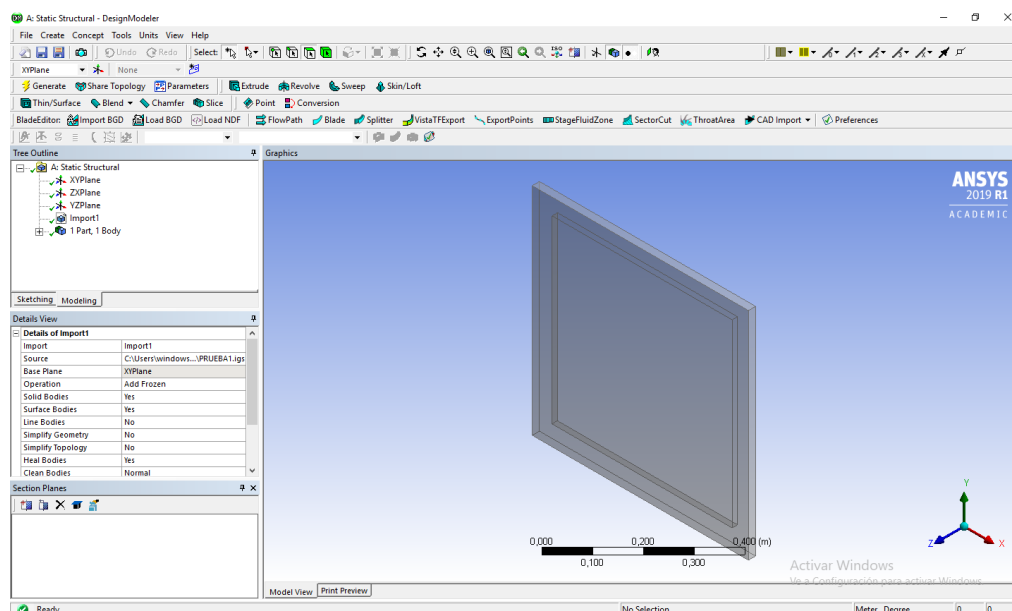


Figura 25. Placa cuadrada importada en DesignModeler para el ejemplo guiado del Apartado 3.3.

Dada una geometría, el siguiente paso sería realizar la discretización del modelo, en otras palabras, realizar el mallado. Para ello, es preciso cerrar la ventana del DesignModeler y hacer doble clic en la celda ‘Model’. Una nueva interfaz aparece: ANSYS Mechanical (Figura 26).

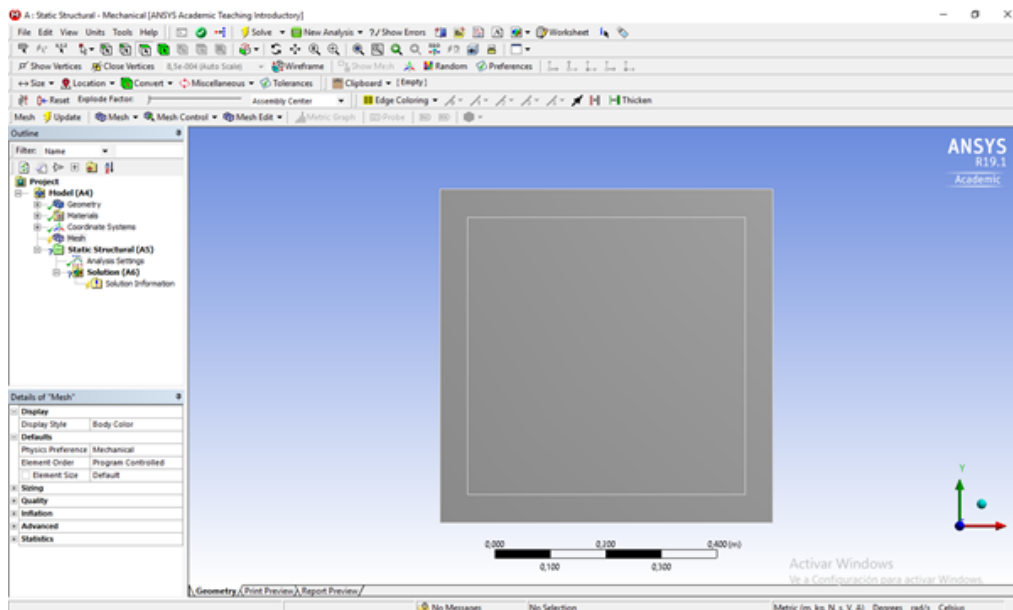


Figura 26. Interfaz de trabajo de Ansys Mechanical.

El tipo de mallado tiene que elegirse cuidadosamente ya que los resultados obtenidos de la simulación se verán altamente influenciados por el mismo. Algunas recomendaciones generales son refinar el mallado cuando se tengan cargas concentradas en el modelo, así como surcos, cambios abruptos de área transversal, soldaduras o cuando existan superficies de contacto entre distintos materiales. Existen varios parámetros para medir la calidad del mallado. Por ejemplo, a continuación, se presentan dos de ellos:

**Skewness**  
(Asimetría/Oblicuidad)

Indica cómo de próximo se encuentra el elemento de parecerse a una cara ideal. Se mide de 0 a 1, siendo 0 el mejor valor posible para este parámetro.

**Orthogonal Quality**  
(Ortogonalidad)

En la cara del elemento pueden definirse tres vectores, un vector normal, un vector del centroide de la celda al centroide de la cara y un vector del centroide de la celda al centroide de la celda adyacente. Por medio de estos tres vectores, se puede medir cómo de desfasados (desacoplados) están unos elementos con respecto a otros, aunque se vean acoplados en la interfaz gráfica.

Otro aspecto de vital importancia durante la generación del mallado es seleccionar el tipo de elemento. La librería de ANSYS contiene dos tipos básicos de elementos de área y volumen [19]:

- Lineales (Figura 27a y 27b): para análisis estructurales, estos elementos con nodos en las esquinas normalmente ofrecen una solución bastante precisa en un tiempo de computación razonable. A la hora de usar estos elementos es importante evitar formas degeneradas (triangulares y tetraédricas) en regiones críticas.
- Cuadráticos (Figura 27c): para análisis estructurales con elementos degenerados (elementos triangulares 2D y elementos tetraédricos 3D), los elementos cuadráticos proporcionarán normalmente mejores resultados con menor tiempo de computación que los elementos lineales. Sin embargo, para usar la interpolación cuadrática de forma correcta, hay una serie de consideraciones fundamentales que han de tenerse en cuenta, como el hecho de que el nodo esquina de un elemento solo debe estar conectado al nodo de esquina de un elemento adyacente, y no al nodo situado en mitad de la cara, así como evitar situar elementos de interpolación cuadrática y lineal de forma adyacente, ya que el nodo medio de la cara no proporcionaría una interconexión adecuada entre elementos, etc.

Estos elementos básicos se representan esquemáticamente a continuación:

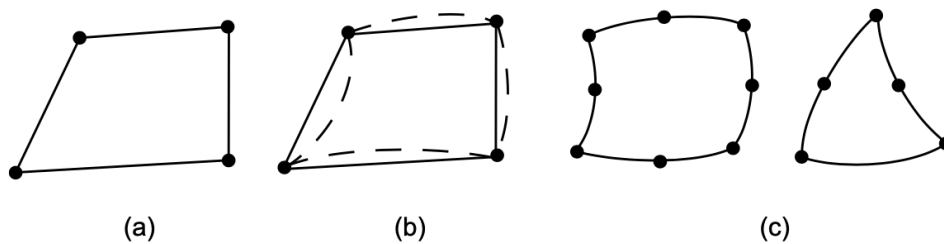


Figura 27. Tipos de elementos en ANSYS [19].

Normalmente, para geometrías sencillas se puede utilizar la herramienta de mallado automático que proporciona ANSYS Workbench. Sin embargo, este no funciona bien cuando la geometría de la pieza es complicada.

En este caso, como la pieza presenta una geometría sencilla (placa cuadrada), se va a utilizar la opción de mallado automático que proporciona el programa (Figura 28).

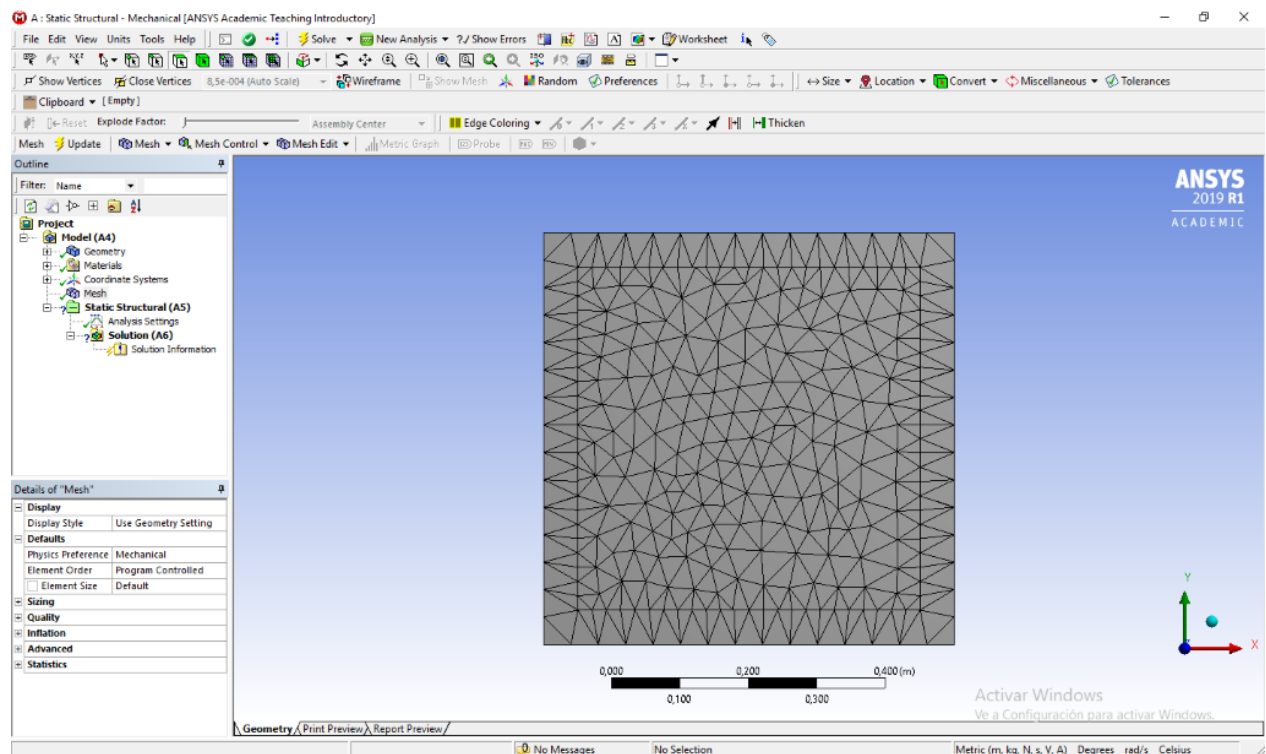


Figura 28. Mallado automático en la placa cuadrada.

Para obtener una geometría más regular se puede utilizar la herramienta:

### Mesh Control>Face Meshing

A continuación, se seleccionan las superficies interior y exterior de la placa simultáneamente y se hace clic en 'Apply' (Figura 29).

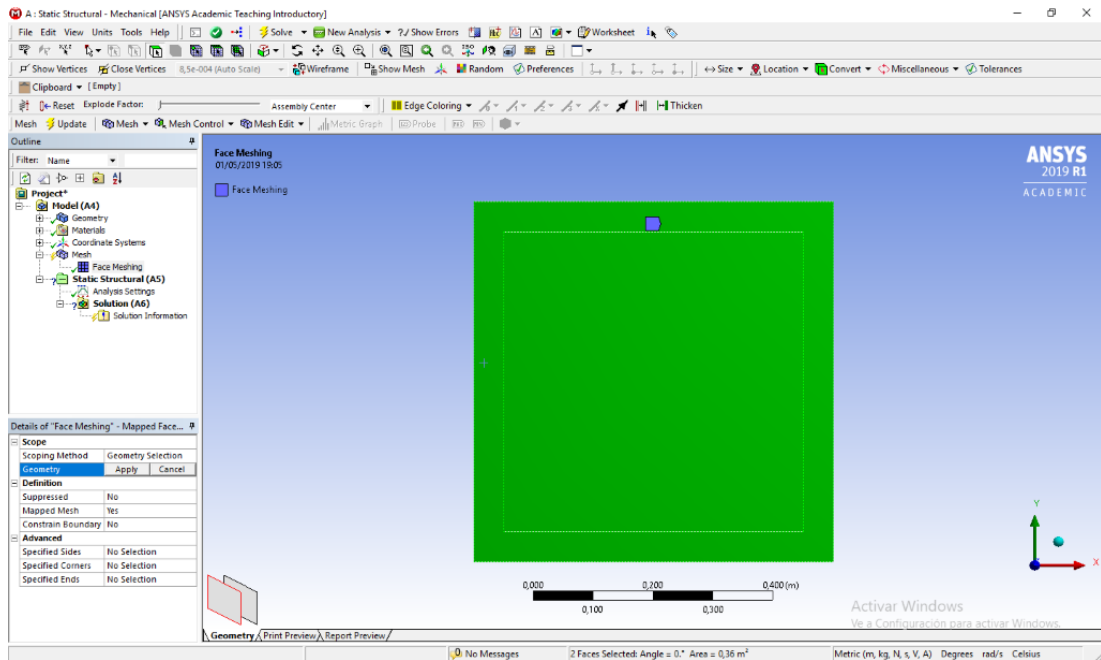


Figura 29. Selección de superficies para aplicar Face Meshing.

El resultado puede apreciarse en la Figura 30: el mallado en el interior de la placa se ha generado en forma de elementos regulares. Por otra parte, el tamaño de los elementos también puede definirse de antemano por medio de la opción:

### MeshControl>Sizing

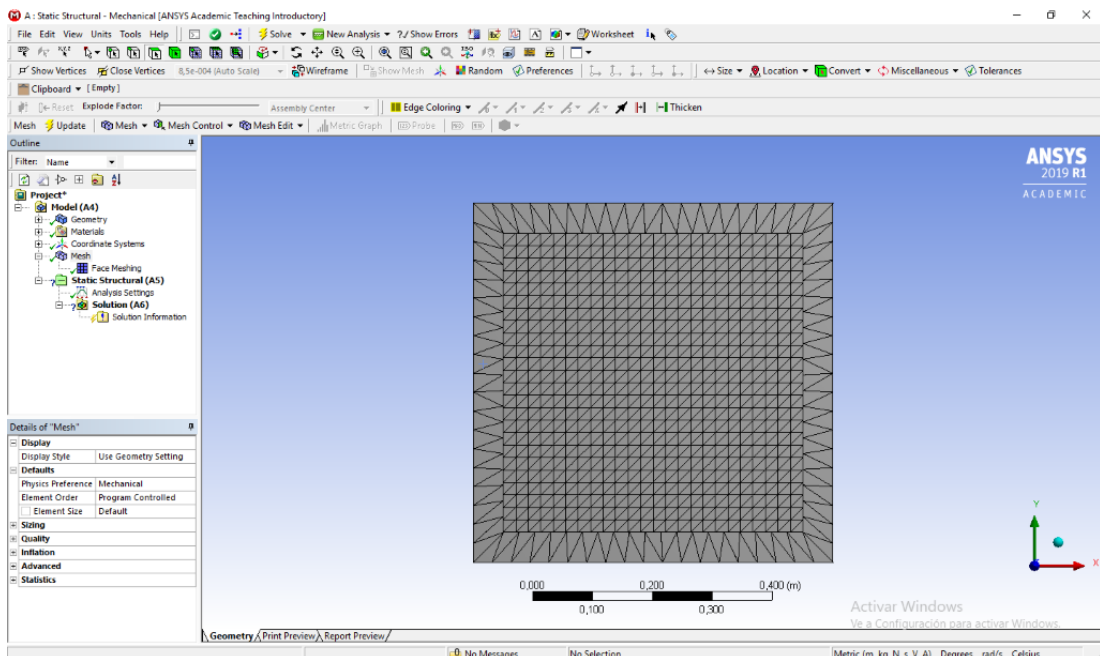


Figura 30. Placa tras aplicar la herramienta Face Meshing.

El siguiente paso sería definir las condiciones de contorno. Éstas se introducen siguiendo la siguiente secuencia (Figura 31):

### Static Structural>Insert>Displacement

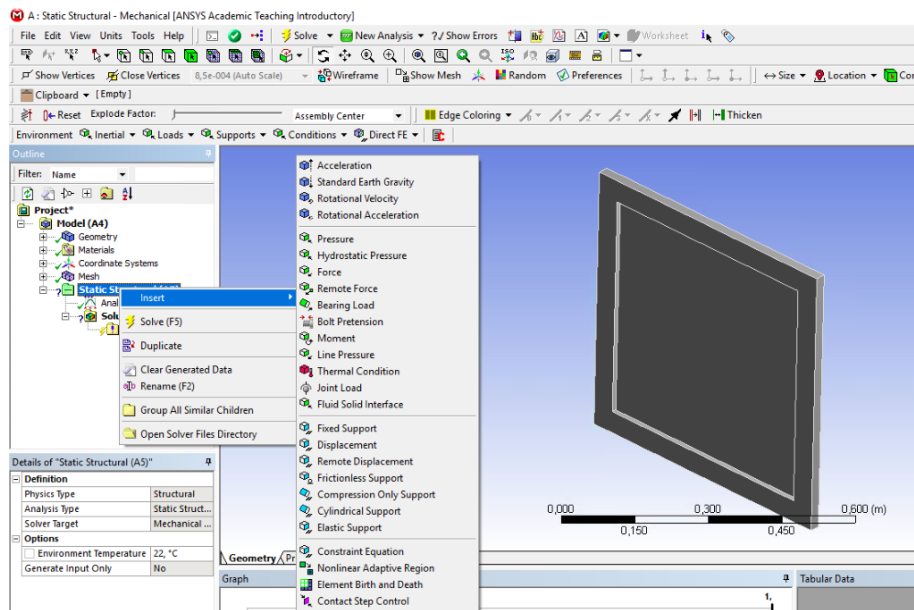


Figura 31. Menú contextual de “Static Structural” e “Insert”.

Para esta pieza se van a encastrar dos superficies laterales de la placa (Figura 32), es decir:

$$U_x=U_y=U_z=0.$$

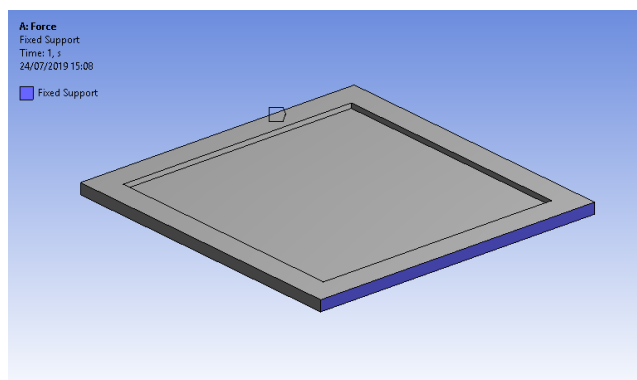


Figura 32. Condiciones de contorno de encastre en las superficies laterales de la placa.

A continuación, se introducen las acciones a las que va a estar sometida la pieza bajo estudio. Estas acciones van a ser carga puntual en el centro de la placa, presión y temperatura. Para introducirse las acciones se aplica la secuencia:

**Static Structural>Insert>Pressure/Thermal Condition**

En primer lugar, se va a proceder a aplicar la carga puntual. Para ello, es necesario realizar una partición de la placa. De este modo, para crear la partición de superficie, se va a generar un plano en la superficie de la placa, para posteriormente realizar un Sketch. Se sigue la secuencia de instrucciones:

**Create>New Plane>Type>From Face**

A continuación, se selecciona la superficie sobre la que se desea crear el nuevo plano (definido por un sistema de coordenadas) y se hace clic en ‘Generate’. Una vez creado el plano, éste se selecciona en el árbol de trabajo situado a la izquierda de la zona de trabajo y luego se hace clic en la pestaña ‘Sketching’ (Figura 33). Para poder obtener un punto en el centro de la placa, se dibujan dos líneas que parten del centro de las caras de esta e intersectan en el centro. El fragmento de línea sobrante se puede eliminar con la opción ‘Trim’ en Sketching. El resultado se muestra en la Figura 34.

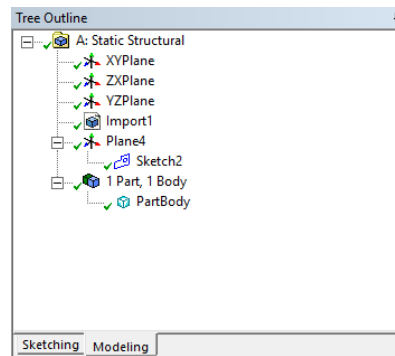


Figura 33. Árbol de trabajo de DesignModeler tras la creación del Sketch.

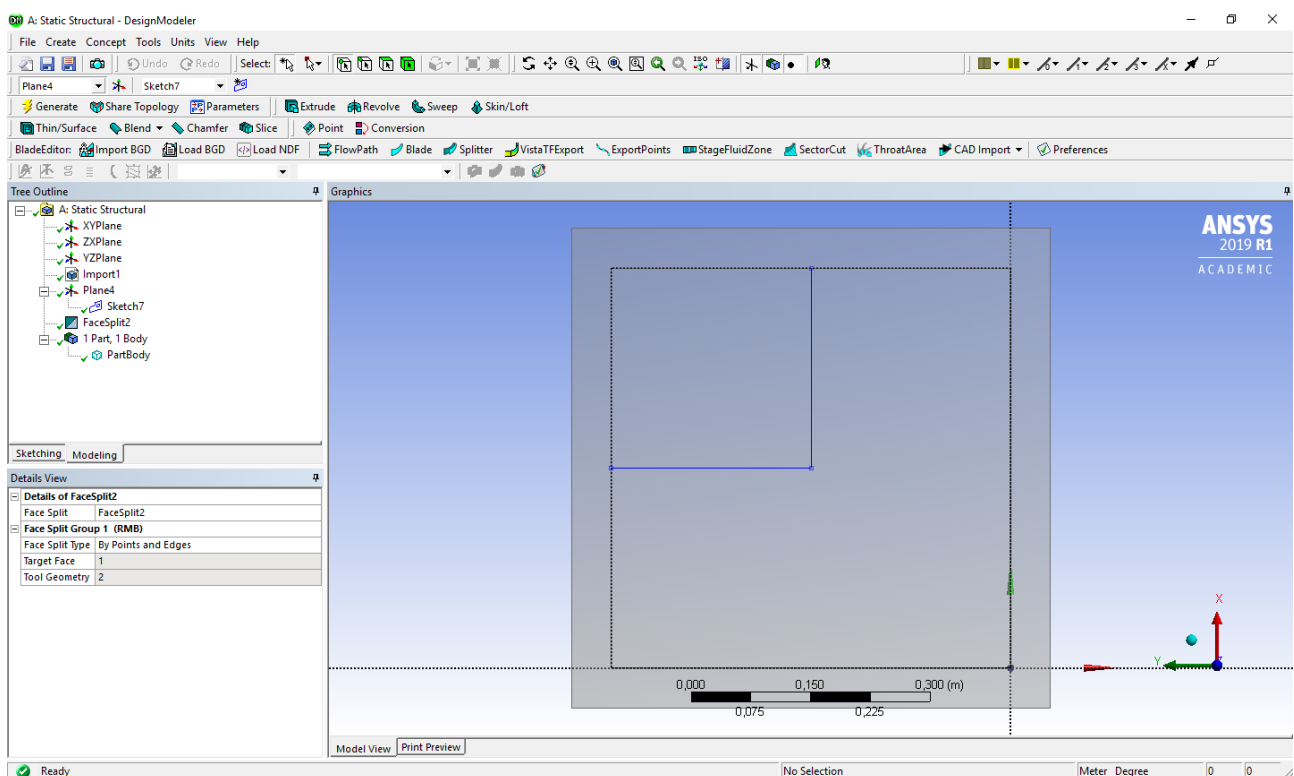


Figura 34. Sketch sobre la superficie superior de la placa.

Una vez creado el Sketch, para realizar la partición de la superficie se sigue la siguiente secuencia:

**Tools>Face Split>Target Face/Tool Geometry**

Dentro del menú 'Target Face' se selecciona la superficie interior de la placa, mientras que en 'Tool Geometry' se selecciona el Sketch que se acaba de generar. Finalmente, se hace clic en 'Generate'.

Tras obtener la partición, se cierra el módulo DesignModeler y se vuelve de nuevo a Ansys Mechanical. Es importante resaltar que el mallado ha de actualizarse tras la nueva división de la superficie interior de la placa (Figura 35).

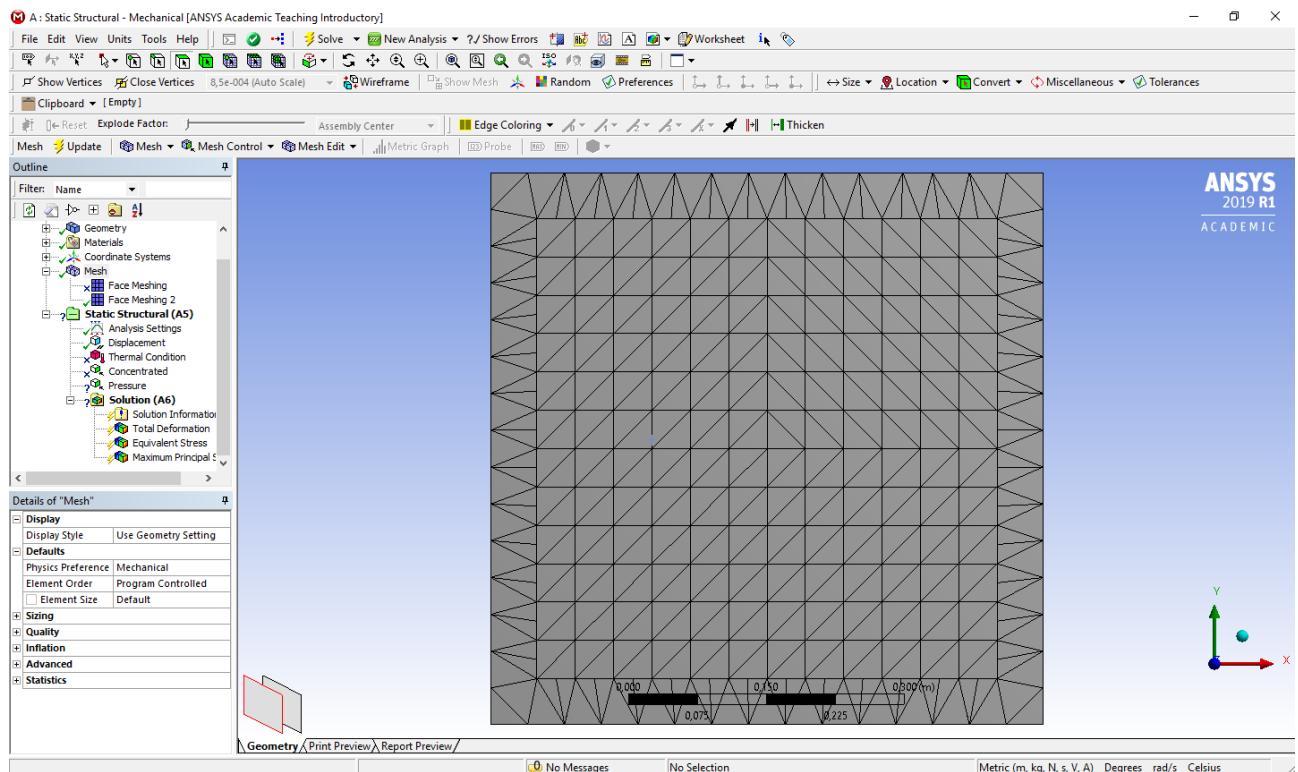


Figura 35. Actualización del mallado tras generar la partición de superficie.

Finalmente, se procede a añadir las acciones. La fuerza puntual, de magnitud 100 N, se aplicará en el centro de la placa y en el sentido negativo del eje global Z (Figura 36), mientras que la presión generalizada, de valor 100 Pa, se aplicará en toda la superficie interior de la placa (Figura 37). Por otra parte, para introducir la acción de temperatura ésta se ha fijado en 100° (Figura 38), con objeto de simular unas condiciones de trabajo lejos del punto de fusión de la pieza: la placa está hecha de acero convencional y este tiene su punto de fusión próximo a los 1500°.

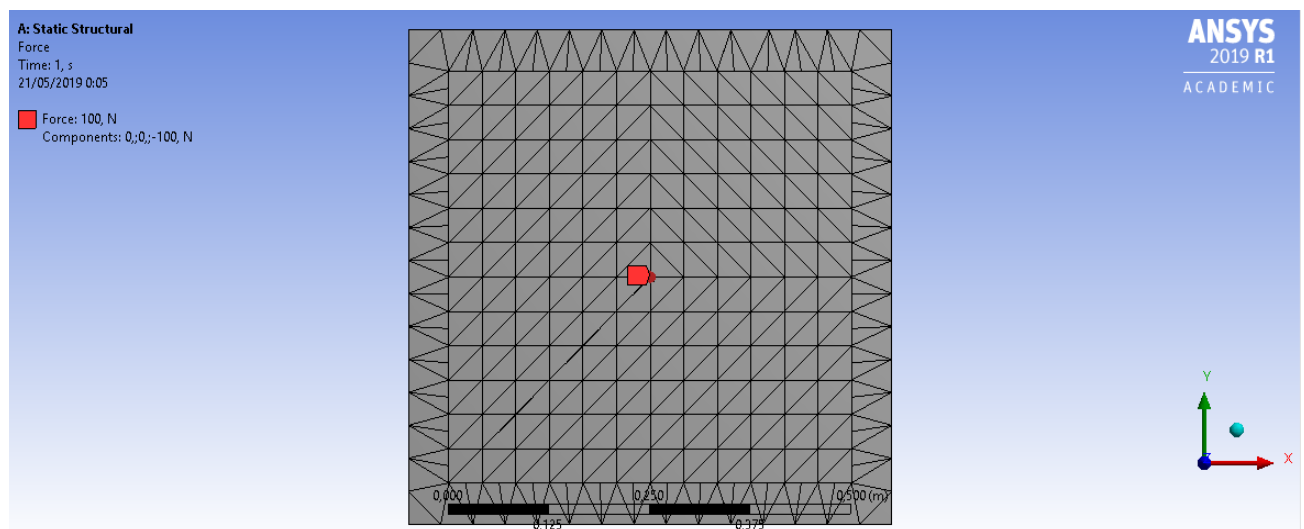


Figura 36. Fuerza concentrada en el centro de la placa.



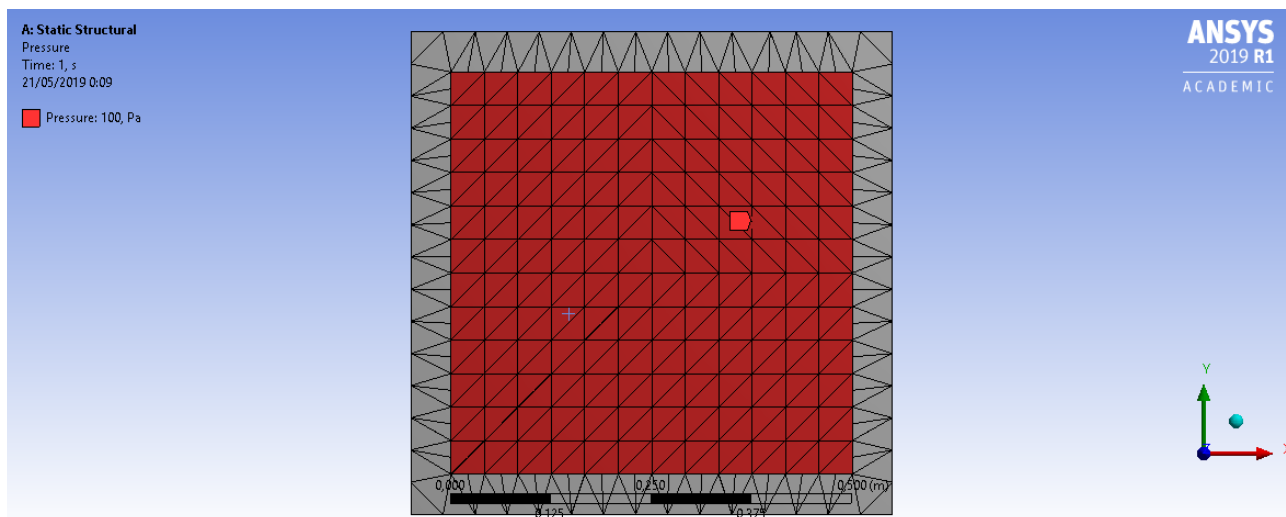


Figura 37. Presión generalizada en la superficie interior de la placa.

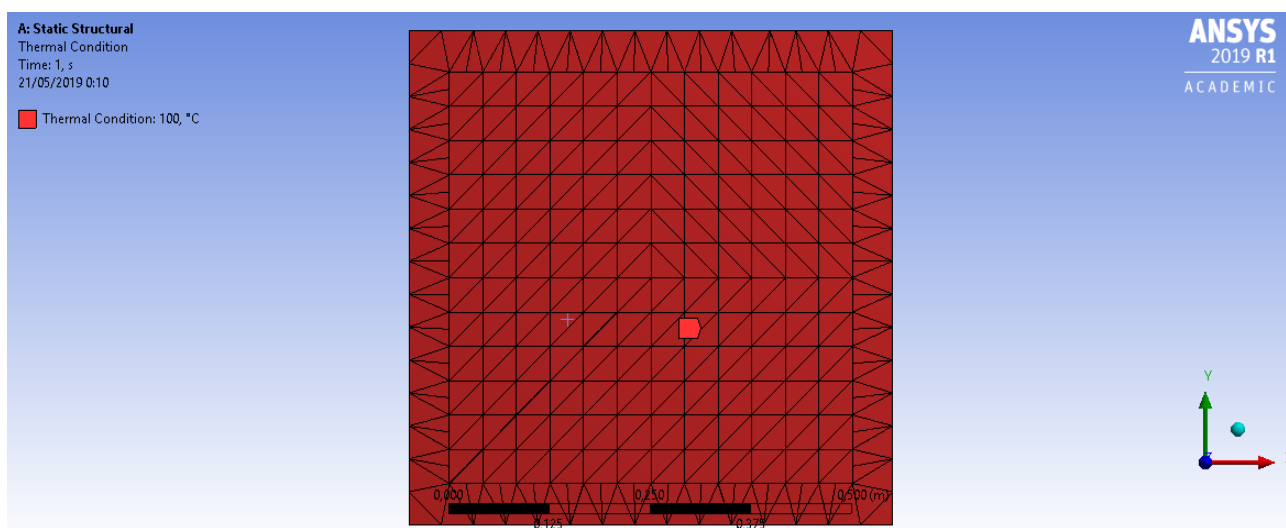


Figura 38. Acción de temperatura en toda la placa.

El último paso sería resolver el modelo y pasar al módulo de ‘Post-processing’ para generar gráficos con resultados e interpretar la solución. Para ello, se selecciona:

#### Static Structural>Solve

De no existir ningún error asociado en el modelo, todo el árbol del proyecto aparecerá con un ‘Tick’ (Figura 39). Tampoco aparecerá ningún mensaje de error en la ventana de comandos inferior.

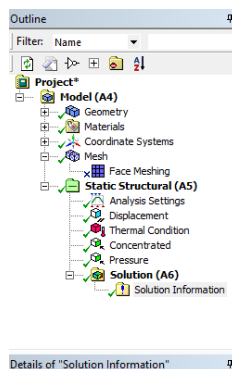


Figura 39. Árbol completo tras obtener la solución.



Es importante resaltar que, para resolver el modelo con diferentes cargas/acciones independientes, se pueden optar por diferentes caminos. Uno de ellos es dejar activa únicamente la carga que se quiera analizar. Para ello, se seleccionan las acciones que se van a suprimir:

**‘Nombre de la acción’ >Supress**

Para revertir la acción:

**‘Nombre de la acción’ >Unsupress**

Cada vez que se quiera analizar una de las cargas de forma independiente hay que volver a resolver el modelo. Se pueden integrar combinaciones de carga por medio de línea de comandos, o utilizando un software auxiliar de cálculo como SDC Verifier. Otra alternativa es anclar varios bloques de análisis desde el entorno global de trabajo. De este modo, en el árbol de trabajo se pueden apreciar varios análisis al mismo tiempo, resolviendo en un solo paso las diferentes combinaciones.

Obtenida la solución para un caso de carga específico, se procede a generar las gráficas de resultados. Para ello, se sigue la siguiente secuencia:

**Solution>Insert>Total Deformation/Stress Equivalent (Von Mises) / Maximum Principal.**

**Solution> Evaluate All Results**

Finalmente, se obtienen los gráficos que se muestran en las Figuras 40, 41 y 42.

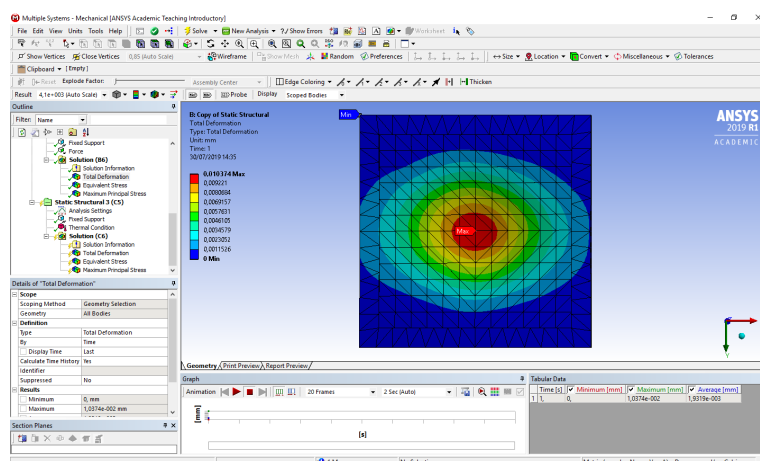


Figura 40. Desplazamientos en la placa bajo la acción de carga puntual.

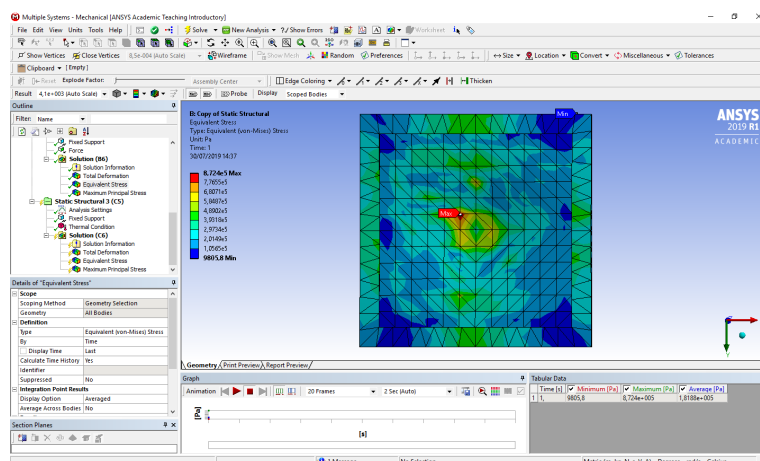


Figura 41. Tensión equivalente de Von-Mises en la placa bajo la acción de carga puntual.

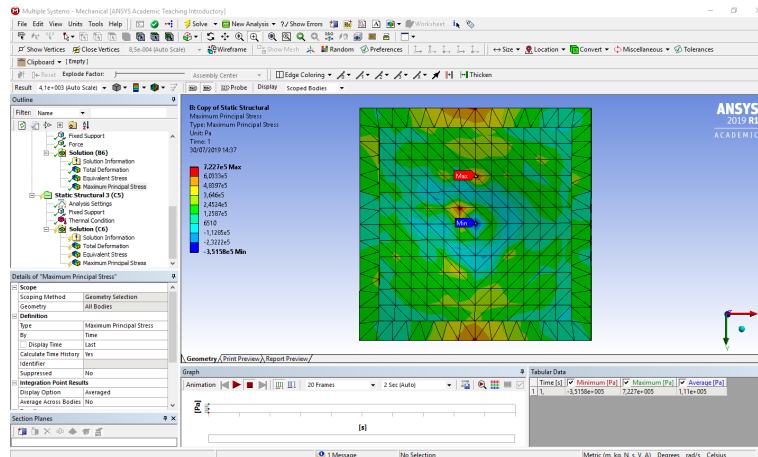


Figura 42. Máxima tensión principal en la placa bajo la acción de carga puntual.

Con este ejemplo se ha querido proporcionar al lector los conocimientos básicos para modelar una pieza mediante el software ANSYS Workbench. Las piezas sujeto del presente proyecto se van a analizar utilizando un procedimiento análogo al que se acaba de describir para la placa cuadrada.

# 4 DESCRIPCIÓN GENERAL DE CATIA Y SU MÓDULO FEM

---

## 4.1 Introducción

CATIA (Computer-aided Three-dimensional Interactive Application) es un software multiplataforma utilizado en ingeniería en las fases de concepción y fabricación de un producto. Algunas de sus aplicaciones son [20]:

- Diseño asistido por ordenador (CAD): diseño mecánico de piezas en 2D y 3D, ensamblajes, placas, etc.
- Análisis y simulación de piezas (CAE): cálculos estructurales por medio del Método de Elementos Finitos, etc.
- Fabricación asistida por ordenador (CAM): generación automática de programas de mecanizado por control numérico.

A continuación, se va a realizar una descripción general de los elementos que componen el menú principal del programa, así como de los entornos de trabajo para el diseño de elementos mecánicos.

Cada uno de dichos entornos posee un menú de herramientas específico, donde se encuentra un conjunto de botones para desempeñar una acción de modelado determinada (extrusión, taladrado...). De este modo, durante la construcción de la geometría de la pieza, no dará lugar a que aparezcan en la pantalla otras opciones de menú propias de otros módulos o entornos de trabajo, como, por ejemplo, el módulo de control numérico o el de simulación.

## 4.2 Entorno general de trabajo

En el menú principal (Figura 43) puede identificarse una ventana con las opciones generales más utilizadas (Start, ENOVIA V5 VPM, File, Edit, View, Insert, Tools, Analyze, Window y Help). Entre ellas, destacan las siguientes:

- **Start** recoge los diferentes módulos de trabajo disponibles en CATIA. Al seleccionar uno de estos módulos, CATIA adaptará la interfaz (menús y barras de botones) para trabajar en dicho módulo.
- **ENOVIA V5 VPM** incluye herramientas relacionadas con la gestión documental del producto que se esté diseñando.
- Las opciones **Insert** y **Tools** dependen del módulo en el que se esté trabajando.

Conocer el significado de las diferentes opciones del menú 'Start' (Figura 44) permite obtener una visión de las posibilidades que ofrece CATIA V5.

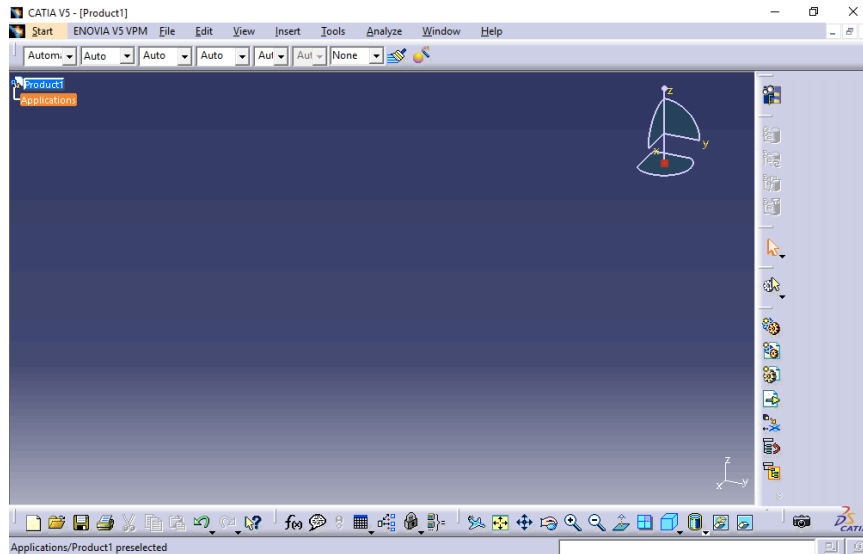


Figura 43. Entorno general de trabajo de CATIA V5.

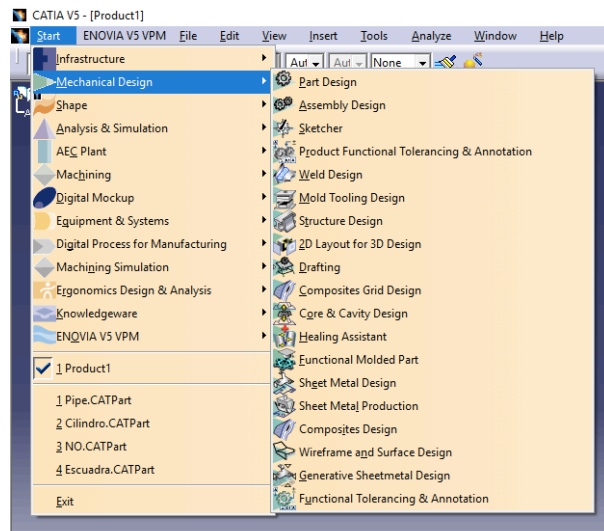


Figura 44. Menú contextual de 'Start'.

A continuación, se proporciona una descripción general de los módulos (o workbench) de CATIA [21]:

1. **Mechanical Desing:** proporciona todas las herramientas para la creación y edición de piezas, chapas metálicas y superficies, moldes y estructuras destinadas a la producción y fabricación de piezas.
2. **Shape Desing:** ayuda a diseñar formas avanzadas por medio de numerosas herramientas de superficie.
3. **Analysis & Simulation:** se utiliza para simular mecánicamente una pieza con ayuda de herramientas avanzadas de mallado.
4. **AEC (Architecture, Engineering and Construction) Plant:** Para diseñar el esquema de una planta de fabricación o de otro tipo. Este módulo permite realizar un diseño preliminar o conceptual de la planta de una forma rápida y eficiente.

5. **Machining:** permite definir todo el proceso de mecanizado para CNC (Control Numérico Computarizado).
6. **DMU (Digital Mockup):** permite a los ingenieros diseñar y configurar productos complejos y validar sus diseños sin necesidad de construir un modelo físico.
7. **Equipment & Systems:** ideal para diseño e integración de sistemas eléctricos, fluidos y sistemas mecánicos dentro de una maqueta digital 3D.
8. **Machining Simulation:** para simular máquinas-herramienta por control numérico.
9. **Ergonomics Design & Analysis:** permite crear, manipular y simular directamente las interacciones exactas de un maniquí digital en contexto con el producto virtual. De este modo, se evalúan y optimizan la postura humana, la visión y la comodidad directamente en el entorno de diseño del producto, facilitando la toma de decisiones y cambios en el diseño.

En el presente proyecto, los módulos que más se van a emplear son:

- **Mechanical Design>Part Design**
- **Shape**
- **Analysis & Simulation> Generative Structural Analysis**

A la hora de diseñar un producto, el conjunto de tareas que se vayan definiendo en el proceso se recogen de forma jerárquica en el árbol que se muestra a la izquierda del entorno de trabajo (Figura 45). La lógica del árbol es la siguiente: si se hace referencia a otros objetos más elementales, los últimos colgarán como ramas de los primeros [20].

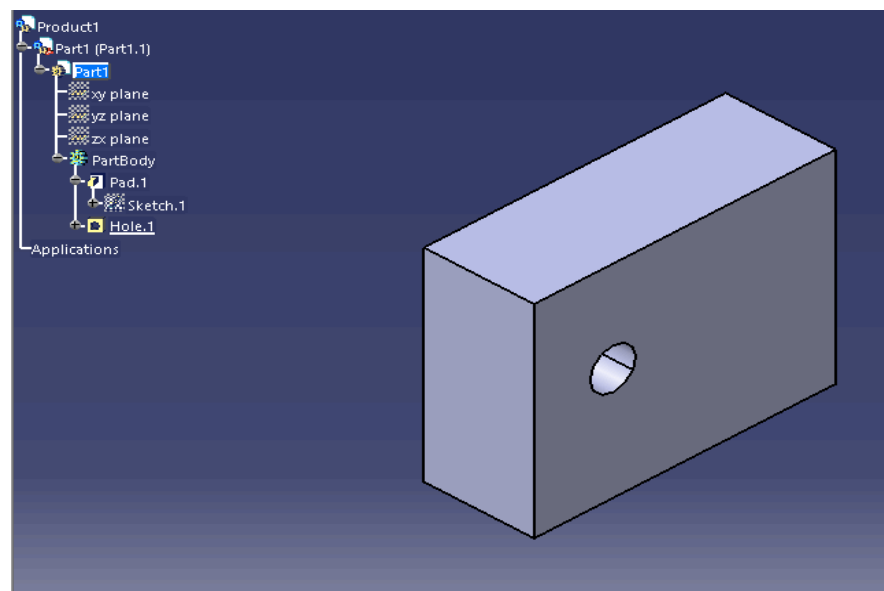


Figura 45. Árbol de trabajo desplegado con objetos elementales.

Por ejemplo, para construir el prisma rectangular de la figura, primero hubo de realizarse un Sketch con un rectángulo. Por ello, el Sketch cuelga de la rama “Relleno rectangular” (Pad). En el árbol, las ramas se pueden desplegar o contraer pulsando (+) o (-). Asimismo, permite esconder parcialmente los elementos del modelo para facilitar el tratamiento de diseños complicados.

### 4.3 Ejemplo guiado

A continuación, se va a realizar un ejemplo guiado paso a paso, con objeto de proporcionar al lector unas nociones básicas del proceso de modelado y simulación seguido en el presente proyecto. La pieza por diseñar (Figura 46) será sometida posteriormente al análisis comparativo entre ANSYS Workbench y el módulo de simulación de CATIA V5.

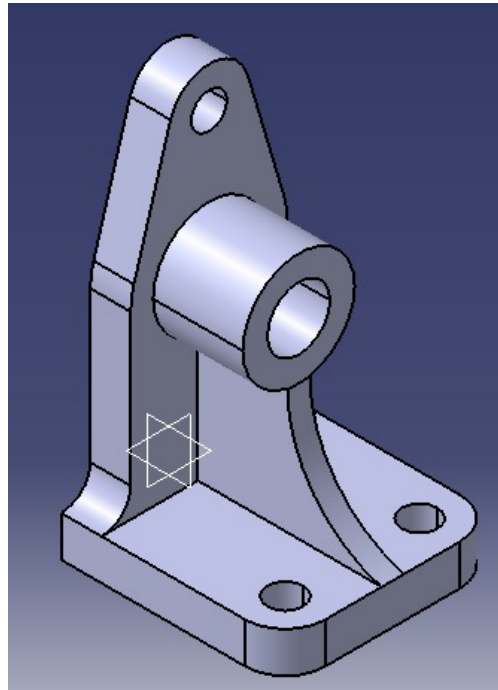



Figura 46. Pieza por modelar en CATIA para el ejemplo guiado del Apartado 4.3.

#### 4.3.1 Obtención del modelo geométrico

Se trabajará en el módulo **Mechanical Design>Part Design**. Aparecerán, pues, en la pantalla todas las herramientas de trabajo asociadas a este módulo. A continuación, es necesario crear un Sketch. Para ello, se selecciona el plano sobre el cual se va a realizar boceto (plano XY en este caso) en el árbol de trabajo (Figura 47) y se hace clic en la herramienta Sketch .

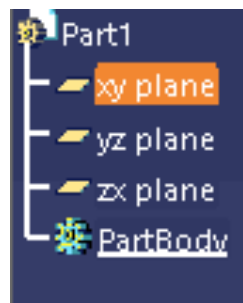



Figura 47. Árbol de trabajo.

Sobre el entorno de trabajo aparecerá una cuadrícula. Esto indica que se está trabajando dentro de la opción “Sketch”. El siguiente paso será seleccionar la herramienta “Rectangle” , para crear un rectángulo. En el entorno de trabajo se dibuja un rectángulo cualquiera (Figura 48).

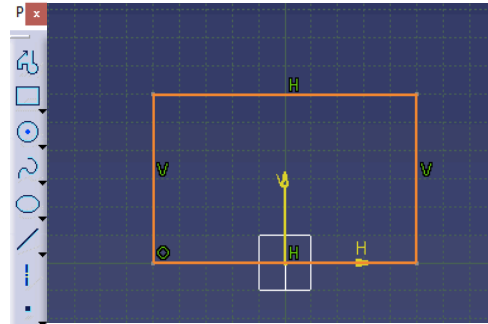



Figura 48. Rectángulo sobre el sketch.

Las dos líneas verticales que conforman el rectángulo se van a someter a la restricción de simetría respecto del Eje Y. Para ello, se selecciona la herramienta “Constraints Defined in Dialog Box”  y se marca la opción “Symmetry” (Figura 49).

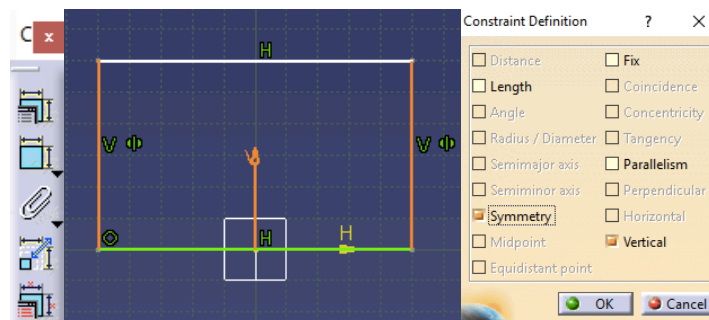




Figura 49. Aplicación de restricciones de simetría.

El siguiente paso será crear un círculo en la esquina superior derecha del Sketch. Para ello, se recurre a la opción “Circle” . Para otorgarle las dimensiones deseadas al Sketch, se utilizará la herramienta “Constraint” . En la ventana “Constraint Definition”, que aparecerá automáticamente en el espacio de trabajo, se introducen las cotas deseadas para cada elemento geométrico del Sketch.

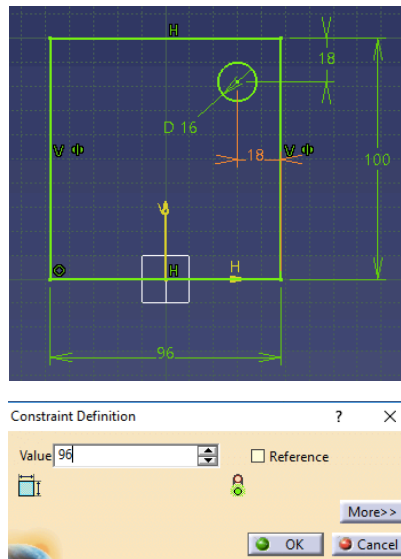



Figura 50. Introducción de las cotas deseadas en el Sketch.

A continuación, con la herramienta “Arc”  se dibujará un arco en la esquina superior derecha del Sketch tal y como se muestra en la Figura 51.

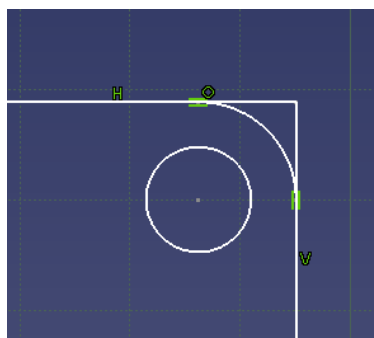





Figura 51. Arco en la esquina superior del Sketch.

Dicho arco ha de ser concéntrico al círculo dibujado con anterioridad. Para ello, se seleccionan al mismo tiempo los dos elementos geométricos y se utiliza la herramienta “Constraints Defined in Dialog Box” , marcando la opción “Concentricity”.

Asimismo, se procederá a introducir una restricción de tangencia del arco con las líneas verticales y horizontales del Sketch, utilizando nuevamente la herramienta “Constraints Defined in Dialog Box” , marcando, en este caso, la opción “Tangency”. Las líneas exteriores al arco en la zona superior derecha del Sketch (Figura 51) se pueden eliminar por medio de la opción “Quick trim” . El Sketch resultante se muestra en la Figura 52.

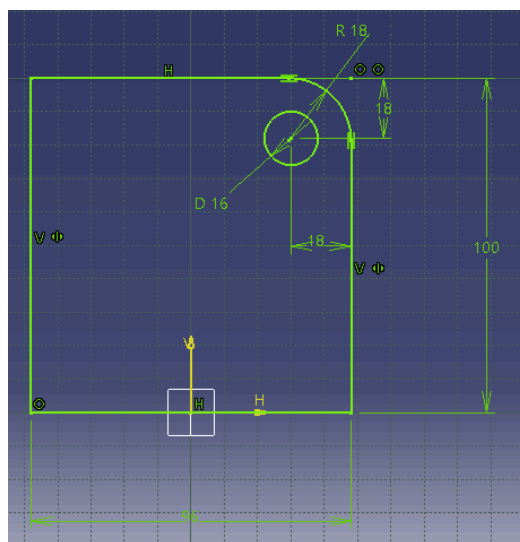




Figura 52. Arco tras la introducción de restricciones y eliminación de las líneas sobrantes.

El siguiente paso será copiar el arco y el círculo en la parte izquierda del sketch por medio de la herramienta “Mirror” . El Sketch entonces quedaría como se muestra en la Figura 53. Para eliminar las líneas sobrantes exteriores al arco, nuevamente, se puede emplear la herramienta “Quick Trim” .



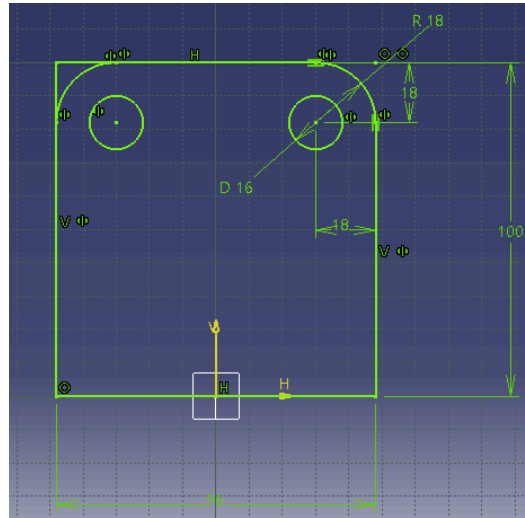



Figura 53. Sketch tras utilizar la herramienta 'Mirror' respecto del eje vertical V.

Finalmente, se selecciona la opción "Exit Workbench"  para salir del modo Sketch. El boceto quedaría con la apariencia que se muestra en la Figura 54.

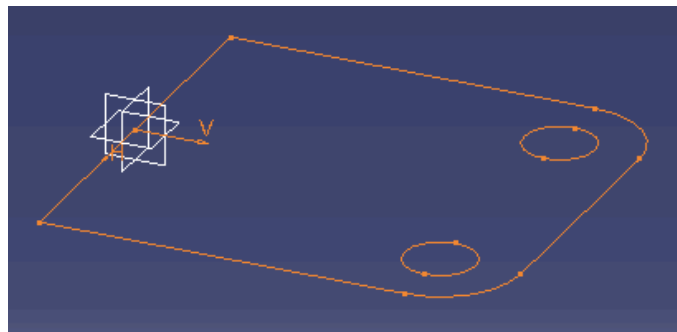



Figura 54. Cambio de apariencia del Sketch tras utilizar la herramienta 'Exit Workbench'.

El siguiente paso será extrudir el Sketch con la opción "Pad" . En el entorno de trabajo aparecerá el diálogo "Pad Definition" donde se introducirá la profundidad de extrusión (Figura 55).

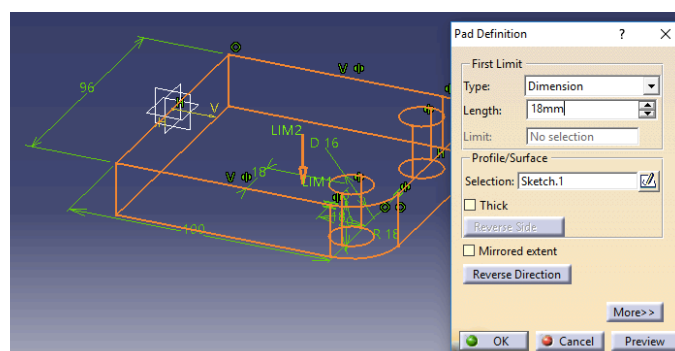





Figura 55. Extrusión del Sketch en el plano XY.

A continuación, sobre el plano ZX se va a proceder a dibujar un nuevo Sketch. Para ello se selecciona dicho plano en el árbol de trabajo y se marca la opción “Sketch” . El Sketch por dibujar se muestra en la Figura 56. Como se ha comentado durante el desarrollo del ejemplo, para introducir restricciones se utilizan las opciones “Constraint”  y “Constraints Defined in Dialog Box” .

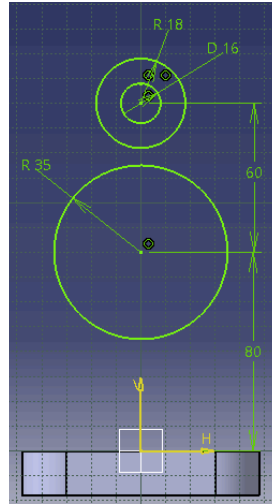




Figura 56. Nuevo Sketch por realizar en el plano ZX.

Lo próximo será dibujar las líneas de tangencia exteriores a los círculos superior e inferior del Sketch. Para ello, se hace uso de la herramienta “Bi-Tangent Lines”  seleccionando, de forma aproximada, los puntos de tangencia en las circunferencias. Dicha herramienta, de forma automática, detectará el punto exacto de tangencia y creará las líneas. A continuación, se va a proyectar en el plano del Sketch una línea utilizando una de las aristas de la extrusión inferior. Para ello, se selecciona por medio de la herramienta “Project 3D Elements”  el elemento (en amarillo) mostrado en la Figura 57.

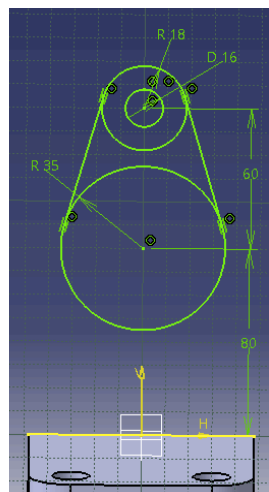



Figura 57. Líneas de tangencia exteriores y arista proyectada en el Sketch.

Para completar el Sketch, se dibujan dos líneas verticales tangentes al círculo de mayor tamaño hasta la línea (en amarillo) que se muestra en la Figura 58. Para ello, se utiliza la opción “Line” .

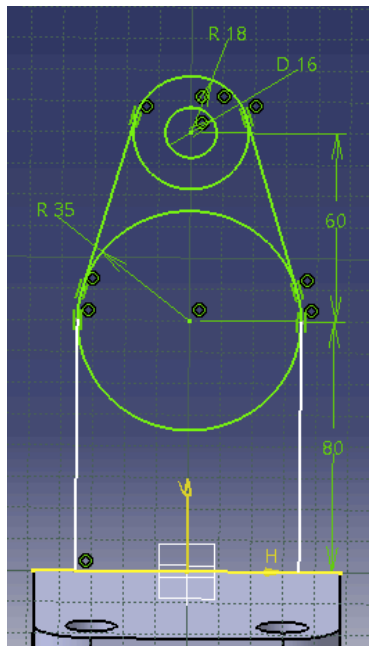



Figura 58. Sketch tras utilizar la herramienta “Line”.

Para eliminar las líneas auxiliares utilizadas para asistir el boceto, se utiliza la opción “Quick Trim” . El resultado se muestra en la Figura 59.

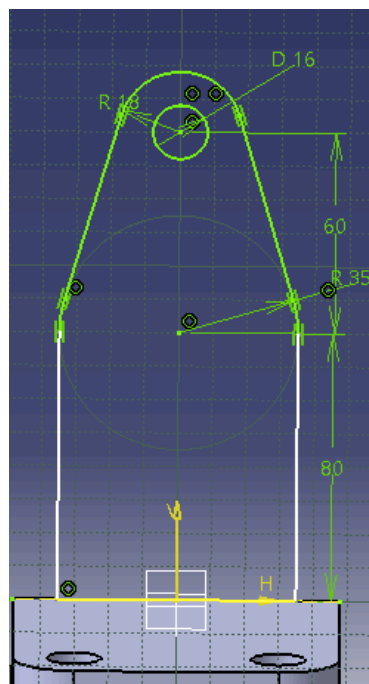




Figura 59. Sketch tras eliminar las líneas auxiliares.

Para cerrar el Sketch se utiliza la opción “Exit Workbench” . El próximo paso será extrudir el Sketch por medio de la opción “Pad”  (Figura 60).

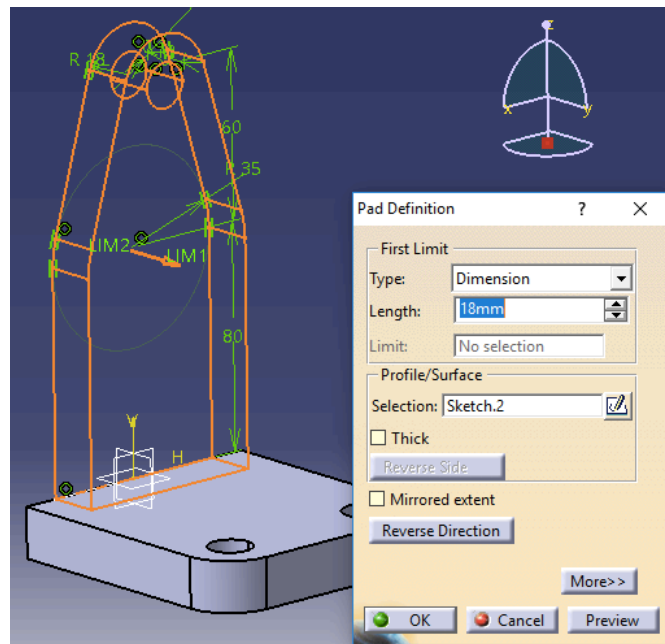



Figura 60. Extrusión del Sketch en el plano ZX.

A continuación, se va a proceder a suavizar la transición entre las extrusiones superior e inferior (en rojo) mostrada en la Figura 61. Para ello, se utiliza la opción “Edge Fillet” . El radio de redondeo se introducirá en la ventana “Edge Fillet Definition” que aparecerá automáticamente en el área de trabajo.

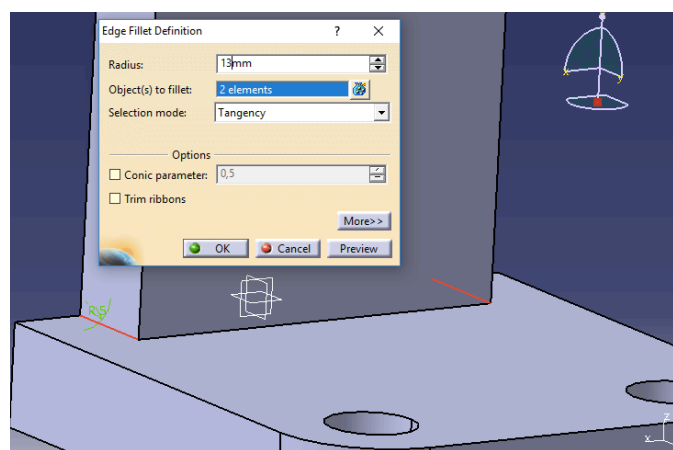





Figura 61. Aristas por redondear y diálogo de trabajo de la herramienta “Edge Fillet”.

El siguiente paso será crear un nuevo Sketch en la extrusión superior. Para ello, se selecciona la superficie y se hace clic en la herramienta “Sketch” . El Sketch por dibujar se muestra en la Figura 62. Para introducir restricciones se utilizan las opciones “Constraint”  y “Constraints Defined in Dialog Box” .

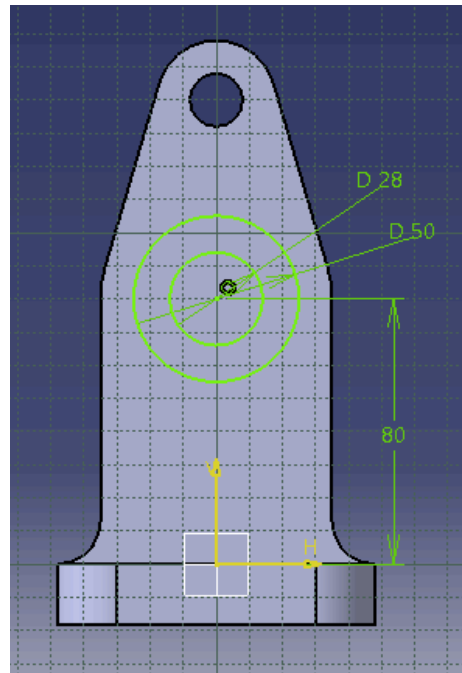




Figura 62. Sketch en la extrusión superior.

Para cerrar el Sketch se utiliza la opción “Exit Workbench” . Nuevamente, se procede a extrudir el boceto por medio de la opción “Pad”  (Figura 63).

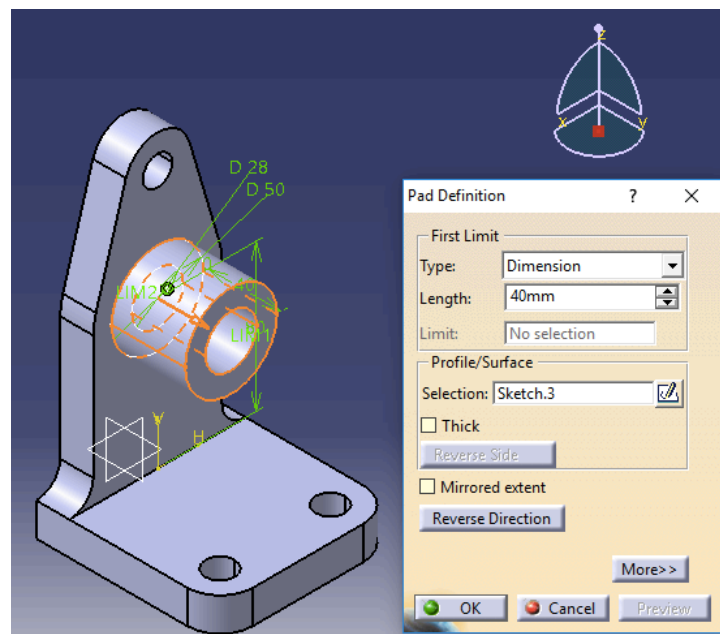




Figura 63. Extrusión del boceto realizado en la extrusión superior.

El último paso sería crear un rigidizador entre el cilindro recién extruido y la base de la pieza. Para ello, ha de crearse un nuevo Sketch en el plano YZ: se selecciona “Plane YZ” en el árbol de trabajo y se hace clic en “Sketch” .

Para la construcción del perfil del rigidizador, se va a dibujar una línea auxiliar por medio de la herramienta “Project 3D Elements” . De este modo, se selecciona la línea (en amarillo) mostrada en la Figura 64.

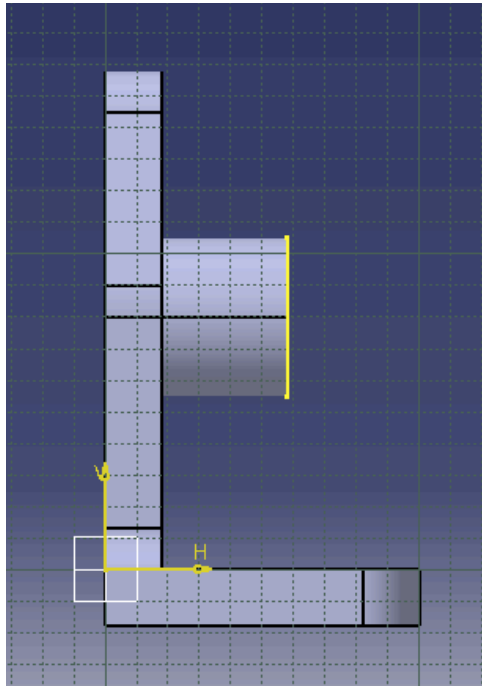




Figura 64. Proyección en el Sketch por medio de la herramienta “Project 3D elements”.

A continuación, con la opción “Arc”  se dibuja el arco mostrado en la Figura 65. En primer lugar, ha de introducirse el centro geométrico, seguido de los puntos inicial y final del arco. El arco debe quedar tangente en los puntos de unión con la pieza. De este modo, es necesario introducir una restricción de tangencia por medio de la opción “Constraints Defined in Dialog Box” .

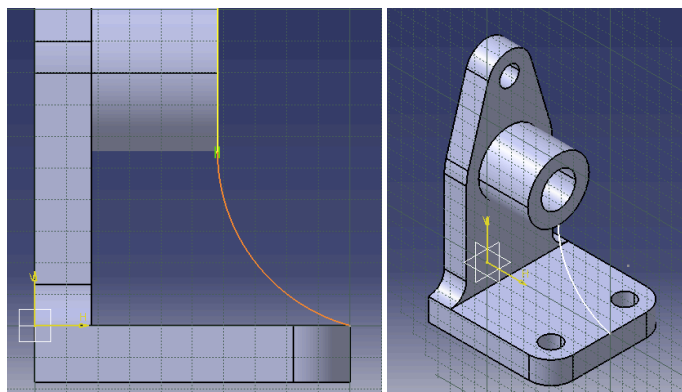




Figura 65. Sketch del perfil del rigidizador.

Una vez creado el arco, la línea auxiliar (en amarillo) que aparece en la Figura 65 puede eliminarse. Finalmente, se cierra el Sketch por medio de la opción “Exit Workbench” .

El último paso sería extrudir el rigidizador mediante la herramienta “Stiffener” . El espesor del rigidizador se especifica en la ventana de diálogo “Stiffener Definition” que aparecerá automáticamente en el área de trabajo (Figura 66).

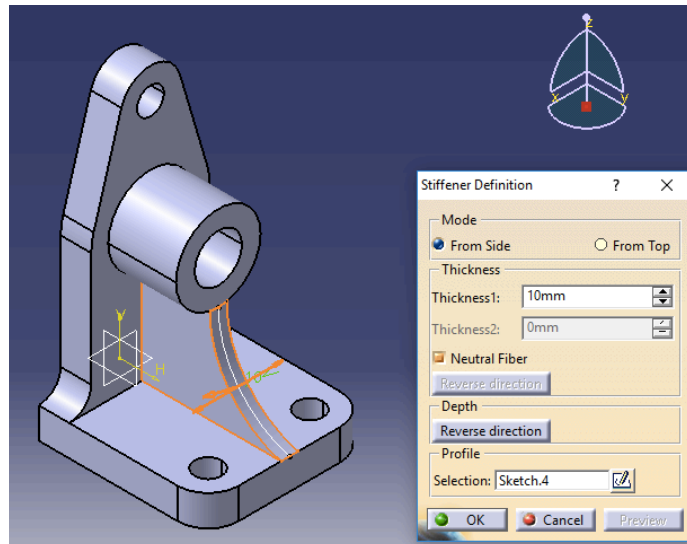


Figura 66. Extrusión del rigidizador y Dialog Box de la herramienta “Stiffener Definition”.

Aquí terminaría la construcción del modelo geométrico por medio del módulo **Mechanical Design>Part Design**. El siguiente paso sería realizar la simulación mecánica de la pieza por medio del módulo **Analysis & Simulation> Generative Structural Analysis**.

#### 4.3.2 Simulación de la pieza

A continuación, se va a seleccionar el módulo **Analysis & Simulation> Generative Structural Analysis** (Figura 67).

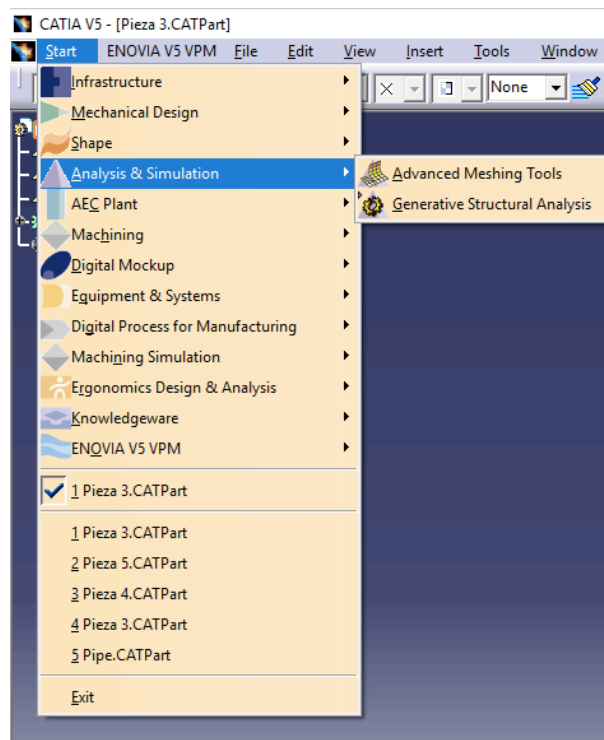


Figura 67. Menú contextual de ‘Analysis & Simulation’.

Es importante resaltar que CATIA permite el análisis de piezas haciendo los siguientes supuestos [22]:

- El material es elástico y lineal
- Se consideran pequeñas deformaciones
- No se consideran los efectos de cizalla en la formulación de barras y placas
- Los efectos de fricción son limitados

Tras entrar en el módulo, en la pantalla aparecerá por defecto la ventana “**New Analysis Case**” (Figura 68). Dado que el análisis al que se van a someter las piezas del presente proyecto será del tipo Estático, se procede a seleccionar “**Static Analysis**”.

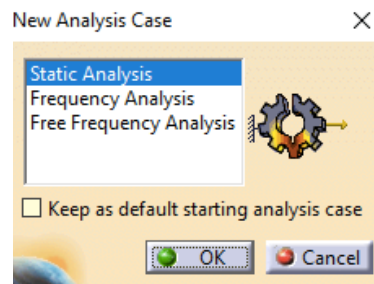



Figura 68. Dialog Box “New Analysis Case”.

El primer paso para poder realizar la simulación sería asignar un material a la pieza (añadir una ley constitutiva). Para ello, se selecciona la pieza y se hace clic en la opción “Apply Material” . El material que se va a utilizar será, por ejemplo, aluminio. De este modo, se elige “Aluminium” en la librería de materiales que aparece sobre el entorno de trabajo (Figura 69).

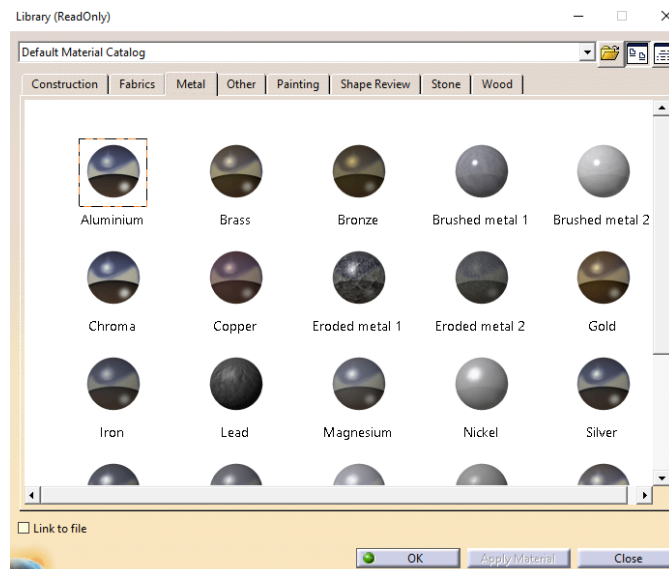



Figura 69. Librería de materiales disponibles en CATIA.

Si se marca la opción de visualización “Shading with material” , la pieza adquirirá la apariencia mostrada en la Figura 70.



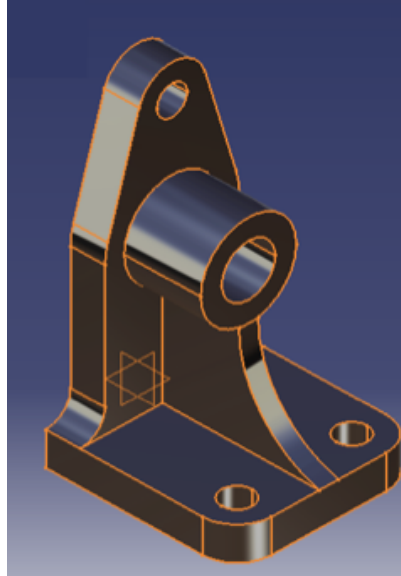


Figura 70. Apariencia de la pieza tras utilizar la opción de visualización “Shading with material”.

El siguiente paso será discretizar el dominio en pequeños elementos geométricos, es decir, mallar la geometría. CATIA propone de forma automática un tipo de elemento de mallado. Para utilizar el mallado automático del software, se hace clic en el tetraedro (en verde) que aparece en el centro de la pieza (Figura 71). Para este caso, los elementos geométricos propuestos para el mallado son tetraedros.

En la ventana “OCTREE Tetrahedron Mesh” se pueden especificar diversos aspectos del mallado, como, por ejemplo:

- El tamaño de los elementos (**Global>Size**)
- El número de nodos del elemento (**Element type>Linear/Parabolic**). La opción “Linear” únicamente añade nodos en los vértices del elemento, mientras que “Parabolic” añade también nodos en las aristas.
- Añadir elementos en las zonas de mayor conflicto (**Local**)

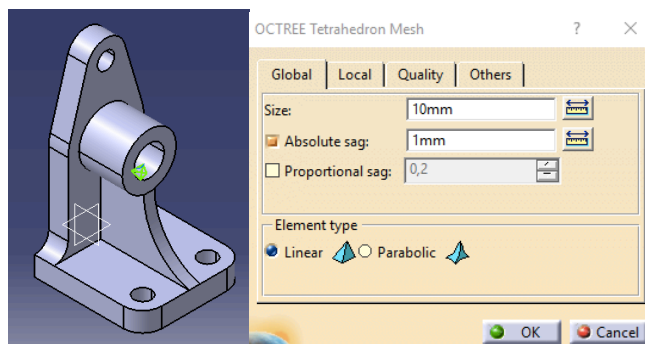


Figura 71. Dialog Box ‘OCTREE Tetrahedron Mesh’.

Existen otros tipos de elementos, los cuales se recogen en el menú “Model Manager” (Figura 72). Dichos elementos son:




- **Octree Tetrahedron Mesher** , para discretizar modelos 3D.
- **Octree Triangle Mesher** , para discretizar modelos 2D.
- **Beam Mesher** , para discretizar barras.



Figura 72. Menú “Model Manager”.

Finalmente, el mallado de la pieza quedaría de la siguiente forma (Figura 73):

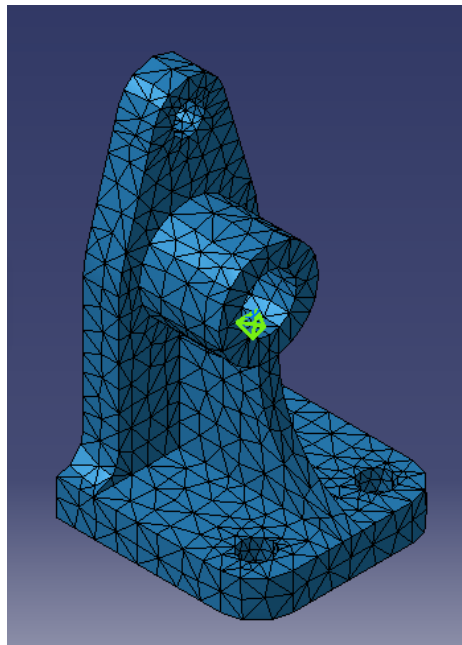



Figura 73. Mallado automático de la pieza.

El siguiente paso será definir las condiciones de contorno. Para ello, se utiliza el menú “Restraints” (Figura 74).



Figura 74. Menú “Restraints”.

La opción “Clamp”  restringe todos los grados de libertad, es decir, encastra la pieza. Para este caso, en particular, se va a encastrar la superficie interior de los taladros (Figura 75).

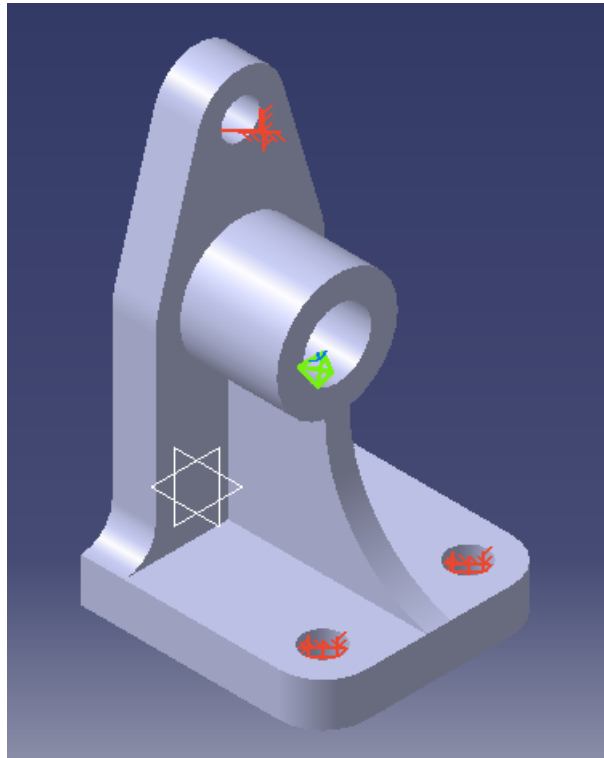



Figura 75. Encastre de la superficie interior de los taladros en la pieza.

Otra restricción muy utilizada es la denominada “apoyo de bolas”, que impide las translaciones normales a la superficie, permitiendo los desplazamientos tangentes a la misma. Dicha restricción se aplicaría mediante la herramienta “Surface Slider” .

Lo último por introducir en el modelo bajo análisis serán las acciones o cargas. Para ello, se emplea el menú “Loads” (Figura 76). Algunas de las acciones más utilizadas son las siguientes:







-  **Pressure:** aplica fuerza por unidad de superficie. Su dirección es normal a la superficie.
-  **Distributed force:** distribuye la carga de forma uniforme en una superficie. Se puede aplicar en cualquiera de las direcciones del eje de coordenadas.
-  **Moment:** aplica un momento uniformemente distribuido sobre la superficie.
-  **Temperature field:** para introducir la acción de temperatura.
-  **Acceleration:** para introducir campos de aceleraciones (gravedad, etc.).



Figura 76. Menú “Loads”.

En este ejemplo en particular, se va a proceder a aplicar una carga de presión en el sentido negativo del eje Z con valor 15.000 N en la superficie mostrada en la Figura 77. Para ello, se selecciona la opción “Distributed Force” .

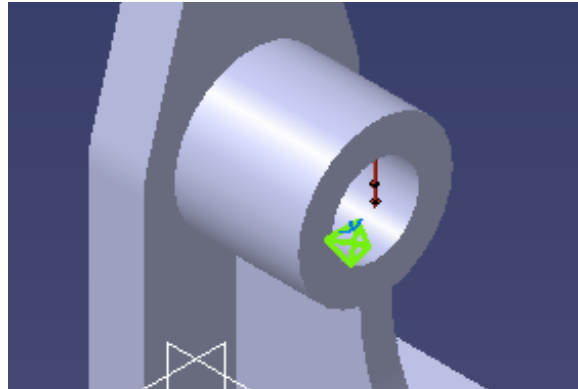



Figura 77. Fuerza distribuida en la pieza ejemplo.

Finalmente, se procede a resolver el modelo. Para ello se hace clic en “Compute” . A continuación, aparecerá una ventana de diálogo donde se podrán seleccionar diversas opciones de cómputo (Figura 78). Dichas opciones abarcan desde la obtención de la solución de forma completa, a, por el contrario, la obtención de una solución parcial. En este caso, se seleccionará la opción “All”.

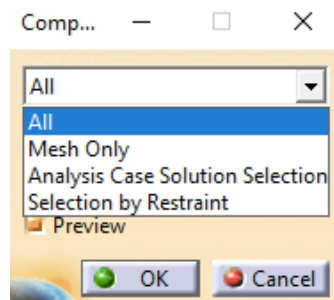




Figura 78. Dialog Box de la herramienta “Compute”.

También es posible imponer un margen de error mediante la herramienta “Global Adaptivity”  y realizar la resolución del modelo de forma que se realice un refinamiento adaptativo de la malla (Figura 79). Para ello, se utiliza la opción “Compute with Adaptivity” . Esta opción consume muchos recursos a nivel informático [22].

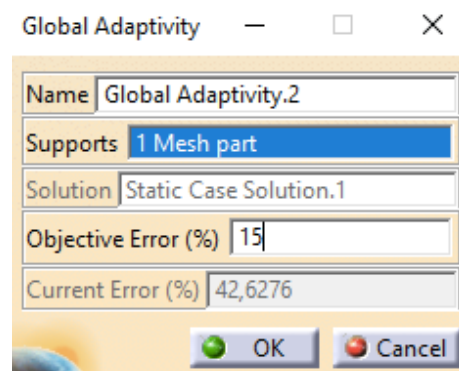


Figura 79. Dialog Box “Global Adaptivity”.

Lo siguiente es realizar el análisis de la solución por medio de las opciones de post-processing. Los menús más utilizados para ello son “Image” (Figura 80) y “Analysis Tools” (Figura 81).



Figura 80. Barra de herramientas “Image”.



Figura 81. Barra de herramientas “Analysis Tools”.

El menú “Image” permite obtener diferentes soluciones sobre el mallado (desplazamientos, tensiones, etc.). Asimismo, la solución puede visualizarse mediante un promedio entre elementos de manera que la representación sea uniforme. Para ello, se utiliza la opción “Average iso” (Figura 82).

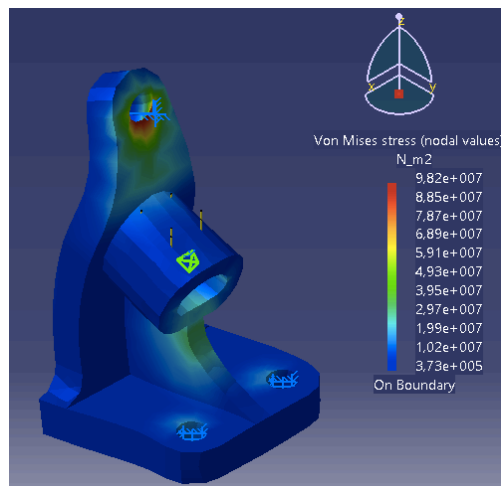


Figura 82. Average iso de la tensión de Von Mises.

Por otra parte, el menú “Analysis Tools” permite obtener animaciones, cortar planos (Figura 83), modificar el factor de amplificación por el que se encuentran multiplicados los desplazamientos, etc.

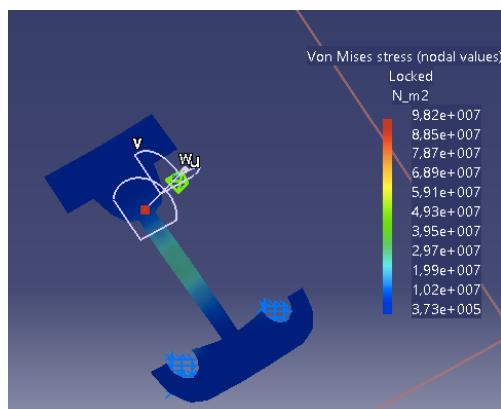


Figura 83. Corte de la pieza realizado mediante la herramienta “Analysis Tools”.



# 5 DESCRIPCIÓN DE LAS PIEZAS Y CONDICIONES DE SIMULACIÓN

## 5.1 Pieza 1: Placa cuadrada

La pieza bajo análisis es una placa delgada (5 mm) con un marco de refuerzo exterior (Figura 84), que estará sometida a las solicitaciones mostradas en la Tabla 2 y Figura 85.

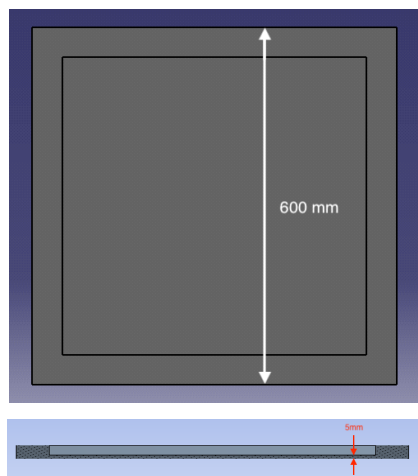


Figura 84. Placa cuadrada.

Tabla 2. Solicitaciones en la Pieza 1.

Solicitud	Magnitud	Unidades	Localización
Temperatura	100	°C	Sólido
Carga Puntual	100	N	Centro de la Placa
Presión	100	N/m <sup>2</sup>	Placa sin marco

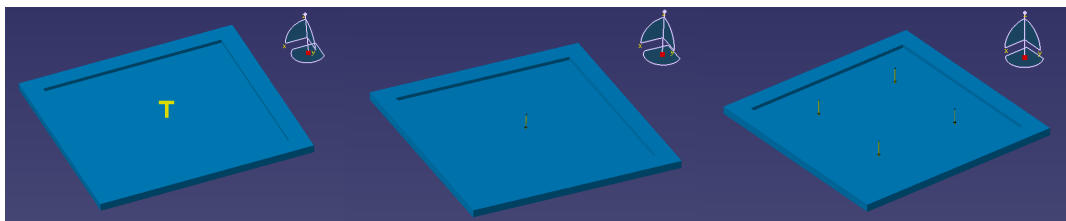


Figura 85. Solicitaciones en Pieza 1.

El material utilizado en la pieza bajo estudio será Acero convencional. Las propiedades que vamos a contemplar se han obtenido de la librería de materiales de CATIA, las cuales se recogen Tabla 3. Dichas propiedades se han introducido en ANSYS Workbench.

Tabla 3. Propiedades del Acero convencional en CATIA.

Propiedades	Magnitud	Unidades
Módulo de Young (E)	$2 \cdot 10^{11}$	N/m <sup>2</sup>
Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )	0.266	-
Densidad ( $\rho$ )	7800	kg/m <sup>3</sup>
Coefficiente de expansión térmica ( $k_T$ )	$1.17 \cdot 10^{-5}$	Kdeg
Resistencia a la tracción ( $y_T$ )	$2.5 \cdot 10^8$	N/m <sup>2</sup>

Las condiciones del mallado se recogen en la Tabla 4. El tamaño de los elementos en ANSYS se ha elegido teniendo en cuenta las restricciones impuestas por la versión estudiantil. Por otra parte, el tamaño de los elementos en CATIA se ha elegido menor tras hacer un análisis de sensibilidad de la malla.

Tabla 4. Condiciones de la malla.

Tipo de elemento	Tamaño	Interpolación
Tetraedros	20 mm (WB) 3 mm (CATIA)	Lineal

Las condiciones de contorno que se van a considerar en el modelo serán empotramientos (Tabla 5) en dos aristas del marco exterior de la placa. Estos se muestran en la Figura 86.

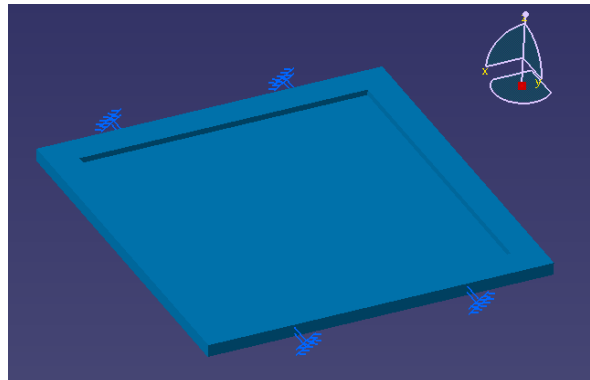


Figura 86. Condiciones de contorno en Pieza 1.

Tabla 5. Condiciones de contorno de empotramiento.

Tipo	Ux	Uy	Uz	Rx	Ry	Rz
Empotramiento	0	0	0	0	0	0

Aparte de la sencillez de su geometría, dicha pieza se ha elegido para estudiar la diferencia en el comportamiento de elementos de pared delgada sometidos a solicitaciones sencillas para los softwares de simulación ANSYS Workbench y CATIA.



## 5.2 Pieza 2: Tubería

La pieza bajo análisis es un fragmento de tubería (Figura 87), que estará sometida a las solicitaciones mostradas en la Tabla 6 y Figura 88.

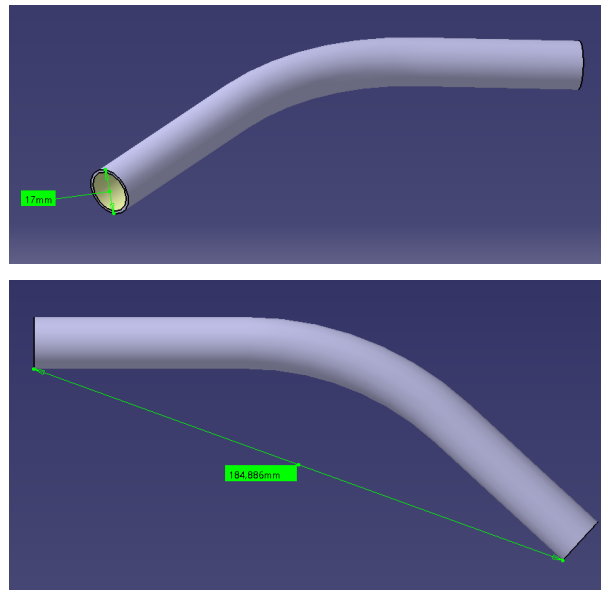


Figura 87. Tubería.

Tabla 6. Solicitaciones en Pieza 2.

Solicitación	Magnitud	Unidades	Localización
Temperatura	50	°C	Sólido
Presión	100.000	N/m <sup>2</sup>	Pared interior del tubo

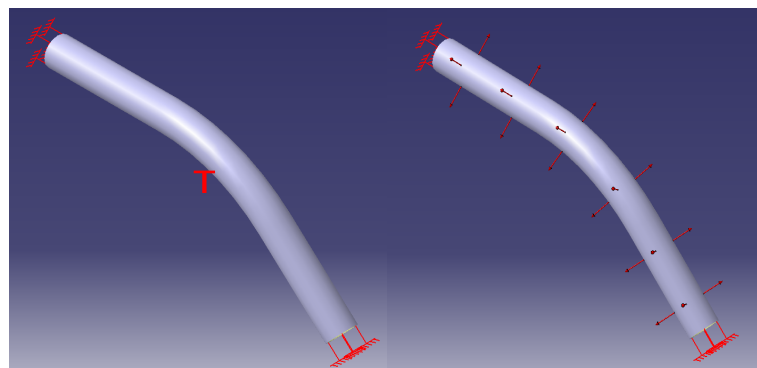


Figura 88. Solicitaciones en Pieza 2.

La magnitud de la solicitación de presión en la tubería se ha elegido de acuerdo con una guía de agua caliente sanitaria [23], teniendo en cuenta que la presión disponible en la red de suministro, o la proporcionada por los grupos de presión, es suficiente para garantizar la presión mínima de 1 bar en griferías. Por ello, ésta se ha elegido 1 bar.

Asimismo, sabiendo que en las tuberías se deben soportar temperaturas de trabajo entre 50-70°C de forma periódica con objeto de prevenir la legionelosis, en el campo de temperatura de la simulación se ha elegido 50°C.

El material utilizado en la pieza bajo estudio será Cobre, por ser ampliamente utilizado en sistemas de tuberías. Las propiedades que se van a utilizar se han obtenido de la librería de materiales de CATIA, las cuales se recogen en la Tabla 7. Dichas propiedades se han introducido en ANSYS Workbench.

Tabla 7. Propiedades del Cobre en CATIA.

Propiedades	Magnitud	Unidades
Módulo de Young (E)	$1.1 \cdot 10^{11}$	N/m <sup>2</sup>
Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )	0.33	-
Densidad ( $\rho$ )	8900	kg/m <sup>3</sup>
Coefficiente de expansión térmica ( $k_T$ )	$1.65 \cdot 10^{-5}$	Kdeg
Resistencia a la tracción ( $y_T$ )	$2.9 \cdot 10^8$	N/m <sup>2</sup>

Las condiciones de mallado se recogen en la Tabla 8. Tras un estudio de sensibilidad de la malla, el tamaño de los elementos en CATIA se ha elegido más pequeño.

Tabla 8. Condiciones de la malla.

Tipo de elemento	Tamaño	Interpolación
Tetraedros	3 mm (WB) 1 mm (CATIA)	Lineal

Las condiciones de contorno que se van a considerar en el modelo serán empotramientos (Tabla 5) en los extremos de la tubería (Figura 89).

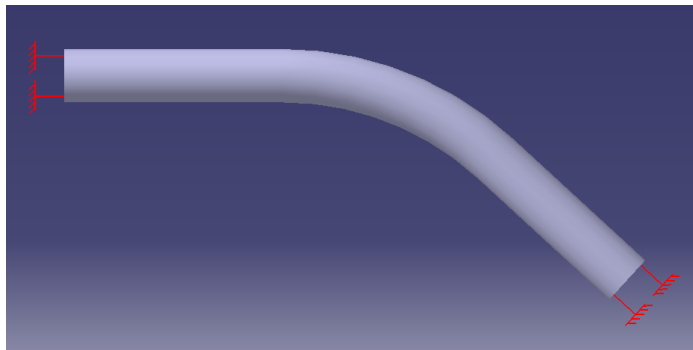


Figura 89. Condiciones de contorno en Pieza 2.

De forma similar a la pieza 1, la pieza 2 se ha elegido con objeto de estudiar la diferencia en comportamiento de elementos cilíndricos de pared delgada sometidos a sollicitaciones sencillas para los softwares de simulación ANSYS Workbench y CATIA.

### 5.3 Pieza 3: Soporte con taladros

La pieza bajo análisis es un soporte con taladros (Figura 90), que estará sometida a las solicitaciones mostradas en la Tabla 9 y Figura 91.

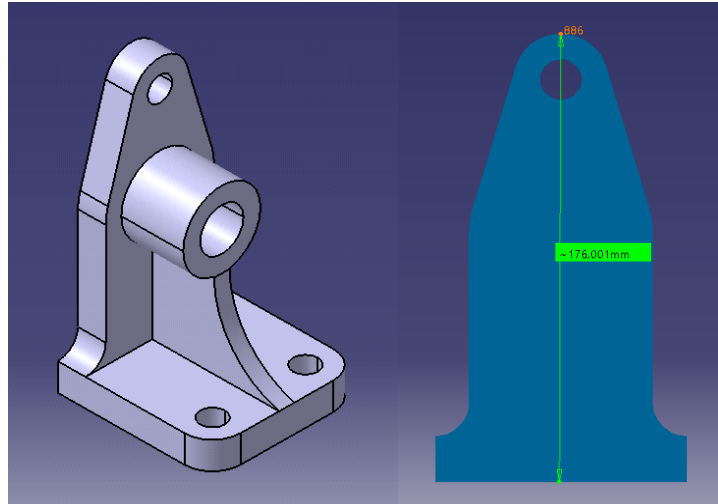


Figura 90. Soporte con taladros.

Tabla 9. Solicitaciones en Pieza 3.

Solicitación	Magnitud	Unidades	Localización
Temperatura	100	°C	Sólido
Fuerza Distribuida	100	N	Saliente superior

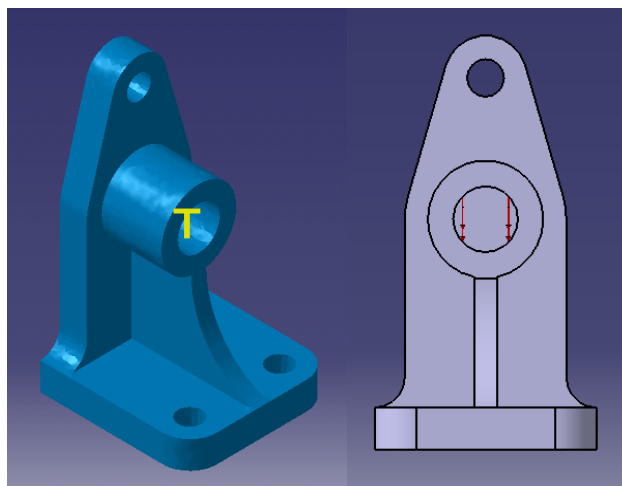


Figura 91. Solicitaciones en Pieza 3.

El material utilizado en la pieza bajo análisis es Acero convencional. Sus propiedades se han obtenido de la librería de materiales de CATIA, las cuales se recogen la Tabla 3. Dichas propiedades se han introducido en ANSYS Workbench.

Las condiciones de la malla se recogen en la Tabla 10. Para la Pieza 3 el tamaño de los elementos será el mismo en ambos programas.

Tabla 10. Condiciones de la malla.

Tipo de elemento	Tamaño	Interpolación
Tetraedros	6 mm	Lineal

Las condiciones de contorno que se van a considerar en el modelo serán empotramientos (Tabla 5) en la superficie interior de los taladros. Éstas se muestran en la Figura 92.

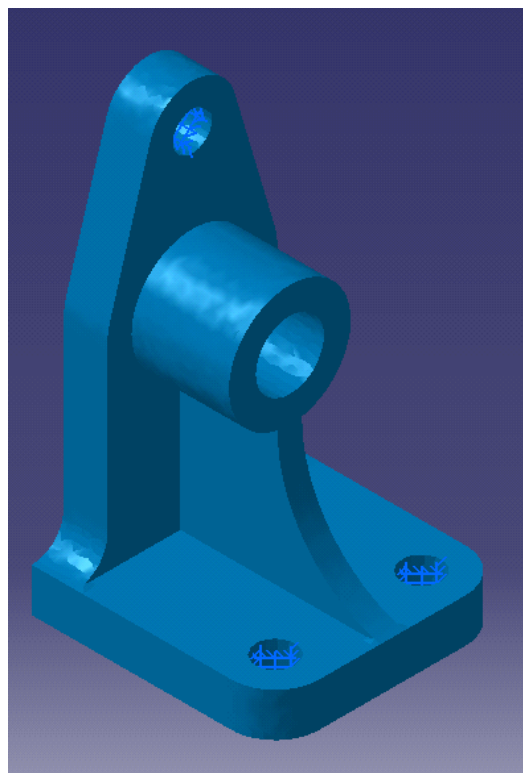


Figura 92. Condiciones de contorno en Pieza 3.

La pieza 3 se ha elegido con objeto de observar si existe diferencia entre los resultados obtenidos mediante ANSYS Workbench y CATIA cuando se simulan piezas de mayor espesor, con agujeros o concentradores de tensión sometidos a sollicitaciones sencillas.

## 5.4 Pieza 4: Cabeza de taladro

La pieza bajo análisis es una cabeza de taladro (Figura 93), que estará sometida a las solicitaciones mostradas en la Tabla 11 y Figura 94.

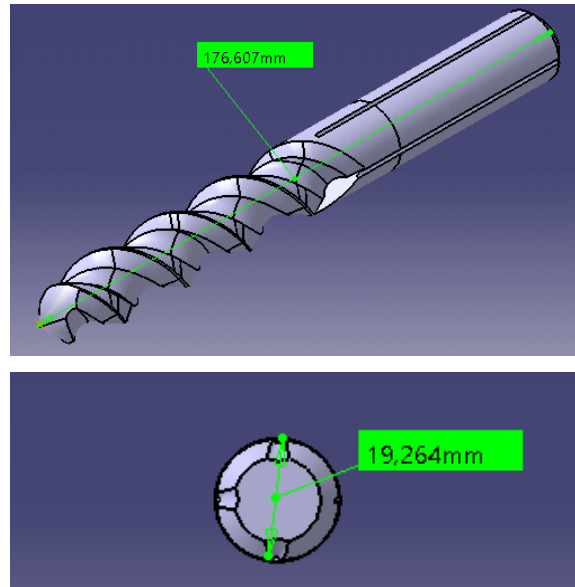


Figura 93. Cabeza de taladro.

Tabla 11. Solicitaciones en Pieza 4.

Solicitación	Magnitud	Unidades	Localización
Temperatura	100	°C	Sólido
Momento puntual	100	N·m	Punta taladro
Presión	100	N/m <sup>2</sup>	3 superficies helicoidales

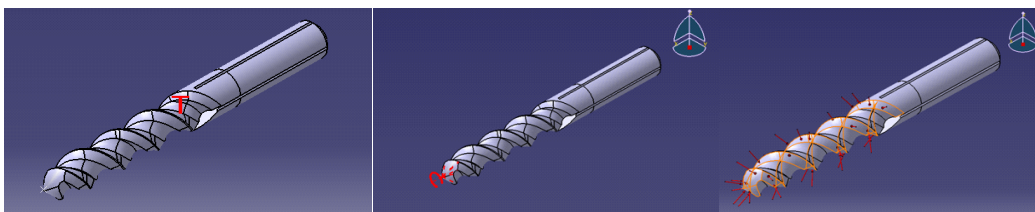


Figura 94. Solicitaciones en Pieza 4.

El material utilizado en la pieza bajo análisis es Acero convencional. Sus propiedades se han obtenido de la librería de materiales de CATIA, las cuales se recogen la Tabla 3. Dichas propiedades se han introducido en ANSYS Workbench.

Las condiciones del mallado se recogen en la Tabla 12. Para la Pieza 4 el tamaño de los elementos será el mismo en ambos programas.

Tabla 12. Condiciones de la malla.

Tipo de elemento	Tamaño	Interpolación
Tetraedros	3 mm	Lineal

La condición de contorno que se va a considerar en el modelo será un empotramiento (Tabla 5) en la base de la cabeza del taladro (Figura 95).

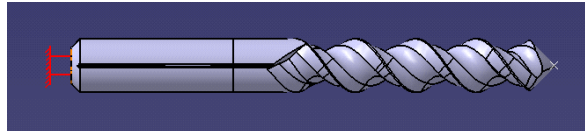


Figura 95. Condiciones de contorno en Pieza 4.

La Pieza 4 se ha elegido con propósito de comparar posibles diferencias existentes en la simulación de una pieza sometida a solicitaciones sencillas de torsión, cuando se utilizan los softwares de elementos finitos ANSYS Workbench y CATIA.

## 5.5 Pieza 5: Llanta de vehículo

La pieza bajo análisis es una llanta de un vehículo de automoción en miniatura (Figura 96), que estará sometida a las solicitaciones mostradas en la Tabla 13 y Figura 97.

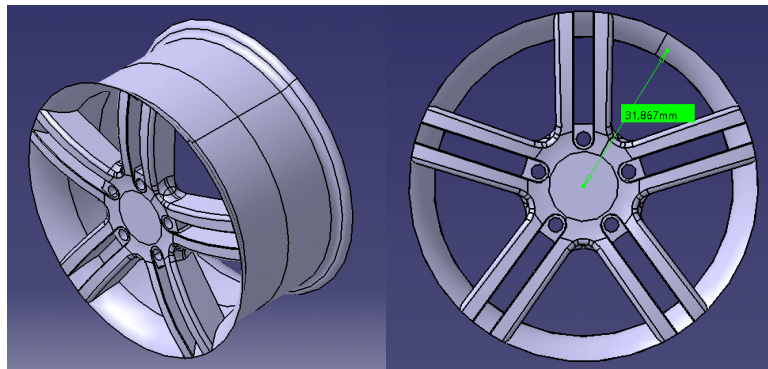


Figura 96. Llanta de vehículo.

Tabla 13. Solicitaciones en Pieza 5.

Solicitación	Magnitud	Unidades	Localización
Temperatura	20	°C	Sólido
Fuerza Distribuida	10.000	N	Centro llanta

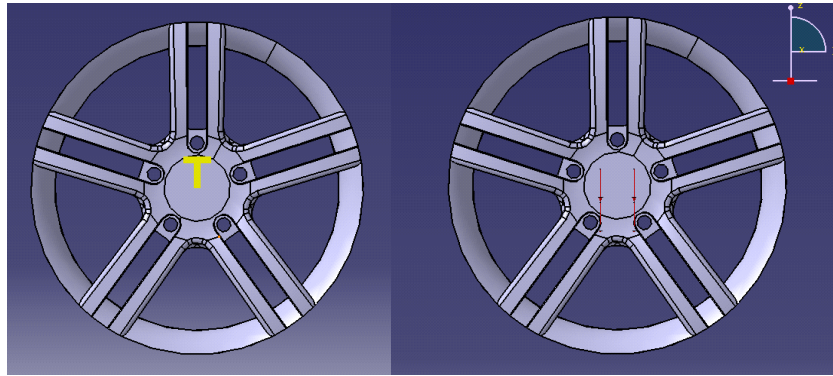


Figura 97. Solicitaciones en Pieza 5.

El material utilizado en la pieza bajo análisis es Aluminio, altamente utilizado en el sector automovilístico gracias a su ligereza y buena resistencia específica. Sus propiedades se han obtenido de la librería de materiales de CATIA, las cuales se recogen en la Tabla 14. Dichas propiedades se han introducido en ANSYS Workbench.

Tabla 14. Propiedades del Aluminio en CATIA.

Propiedades	Magnitud	Unidades
Módulo de Young (E)	$7 \cdot 10^{10}$	N/m <sup>2</sup>
Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )	0.346	-
Densidad ( $\rho$ )	2710	kg/m <sup>3</sup>
Coefficiente de expansión térmica ( $k_T$ )	$2.36 \cdot 10^{-5}$	Kdeg
Resistencia a la tracción ( $y_T$ )	$9.5 \cdot 10^7$	N/m <sup>2</sup>

Las condiciones del mallado se recogen en la Tabla 15. Para la Pieza 4 el tamaño de los elementos será el mismo en ambos programas.

Tabla 15. Condiciones de la malla.

Tipo de elemento	Tamaño	Interpolación
Tetraedros	3 mm	Lineal

Las condiciones de contorno que se van a considerar en el modelo serán empotramientos (Tabla 5) en la superficie interior de los taladros de la cara frontal de la llanta. Estos se muestran en la Figura 98.

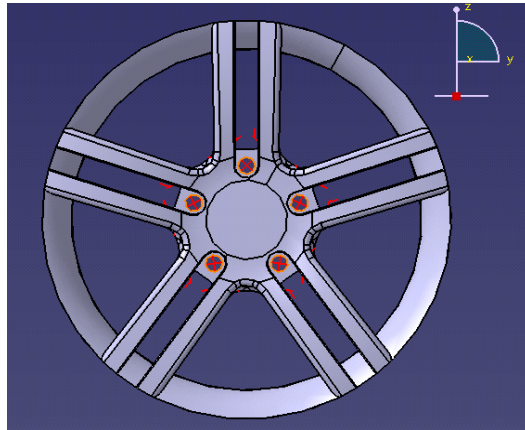


Figura 98. Condiciones de contorno en Pieza 5.

La pieza 5 se ha elegido con objeto de observar si existe diferencia entre los resultados obtenidos mediante ANSYS Workbench y CATIA cuando se simulan piezas con una geometría más compleja y con agujeros o concentradores de tensión, sometidas a cargas sencillas.



# 6 RESULTADOS

## 6.1 Pieza 1: Placa cuadrada

### 6.1.1 Carga Puntual

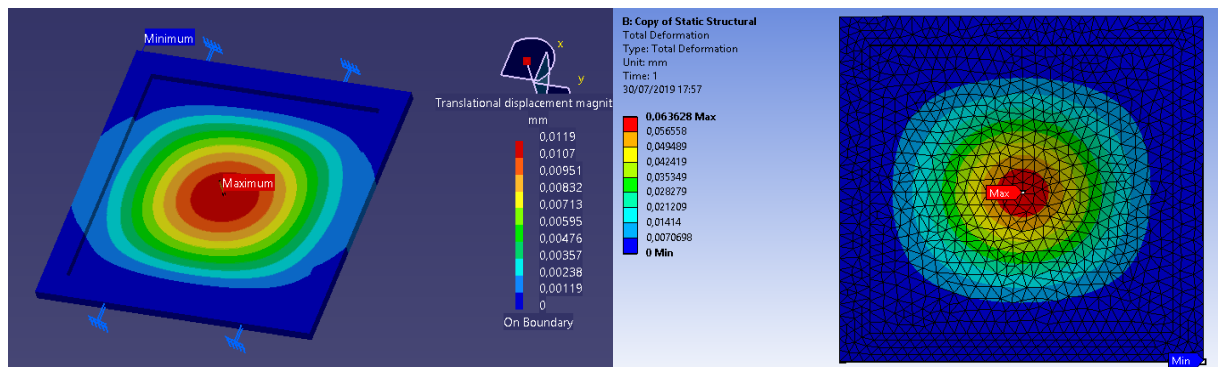


Figura 99. Desplazamiento total para la acción de Carga Puntual en Pieza 1. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

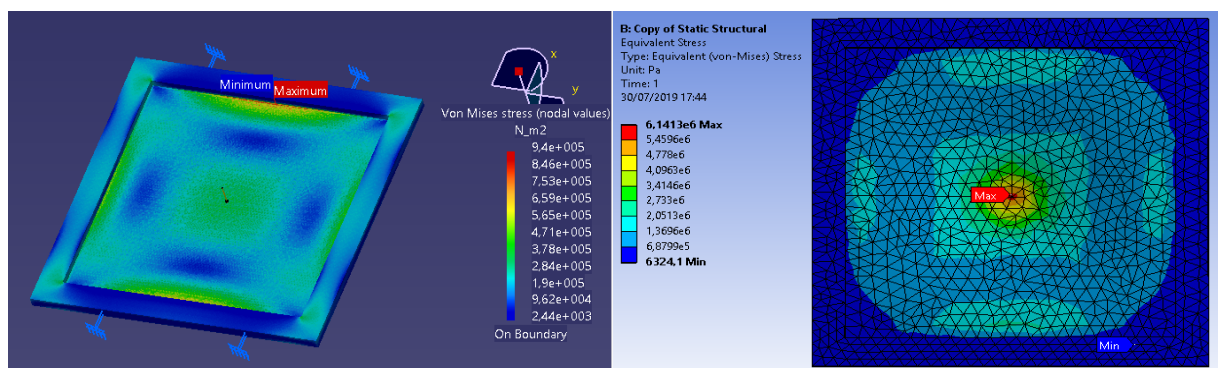


Figura 100. Tensión de Von Mises para la acción de Carga Puntual en Pieza 1. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

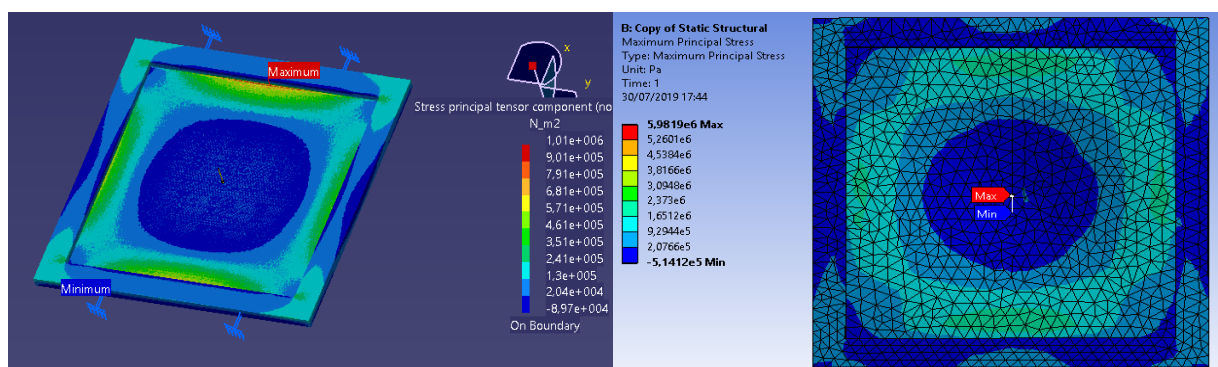


Figura 101. Tensión Principal para la acción de carga puntual en Pieza 1. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

## 6.1.2 Presión

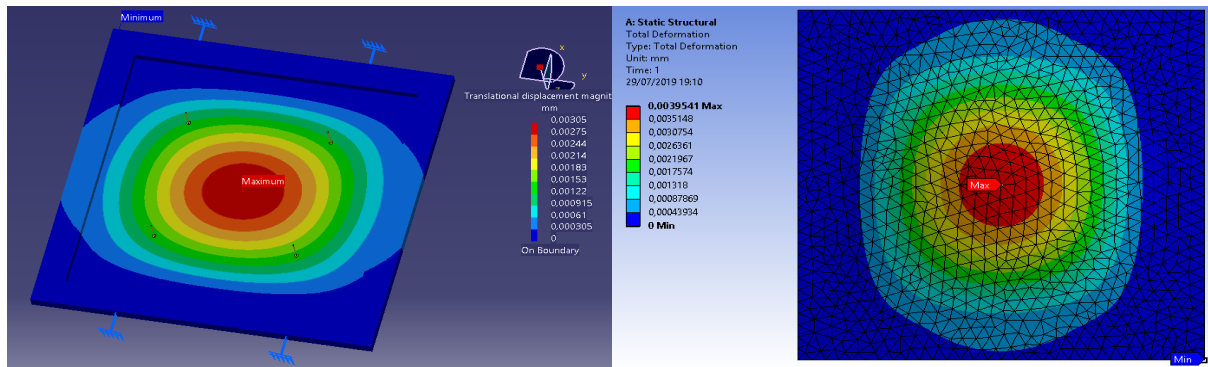


Figura 102. Desplazamiento global para la acción de Presión en Pieza 1. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

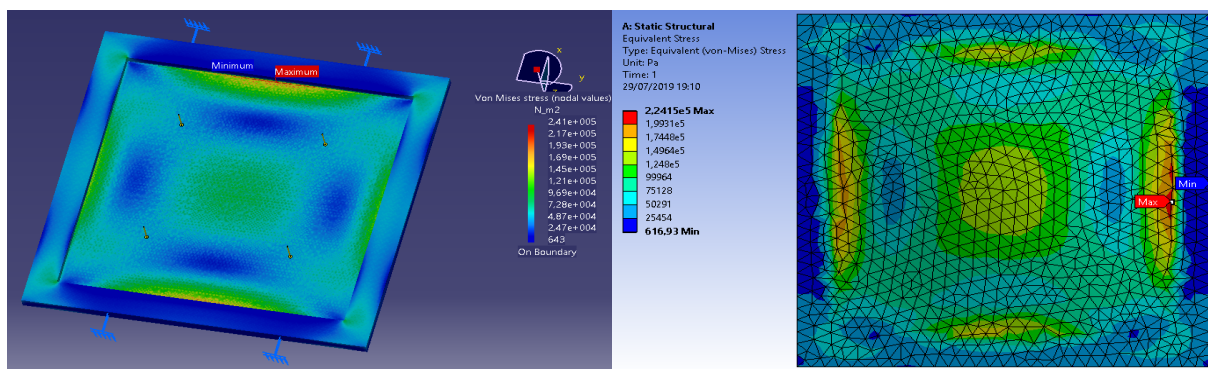


Figura 103. Tensión de Von Mises para la acción de Presión en Pieza 1. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

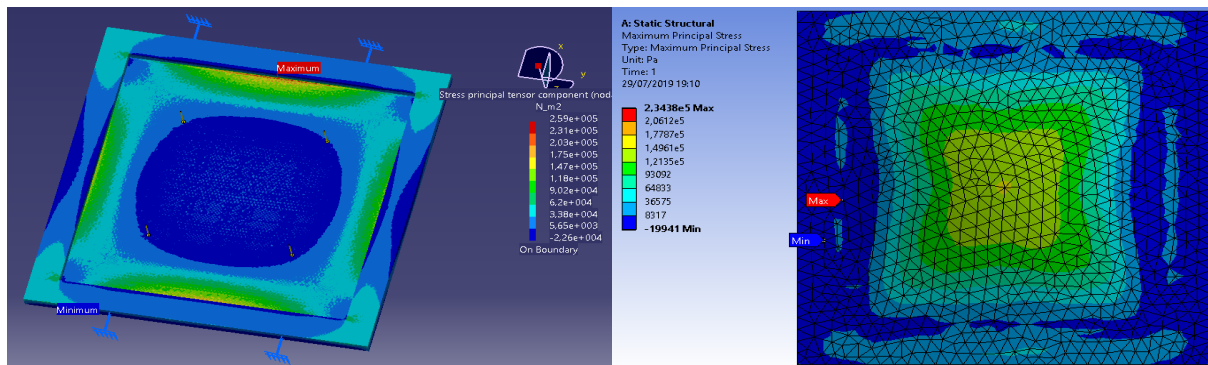


Figura 104. Tensión Principal para la acción de Presión en Pieza 1. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

### 6.1.3 Temperatura

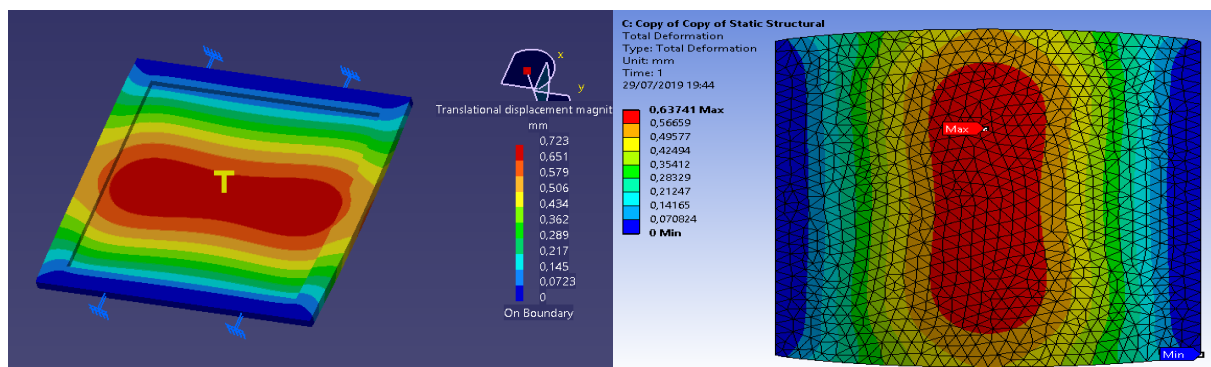


Figura 105. Desplazamiento global para la acción de Temperatura en Pieza 1. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

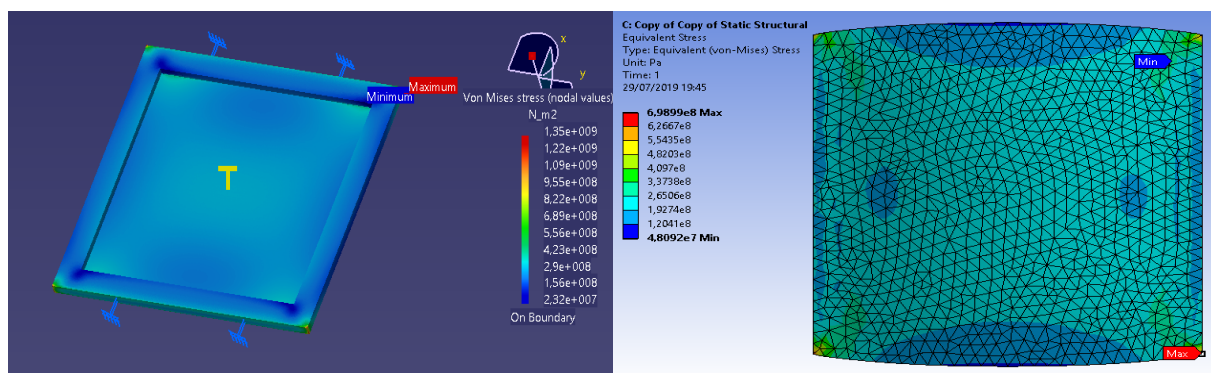


Figura 106. Tensión de Von Mises para la acción de Temperatura en Pieza 1. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

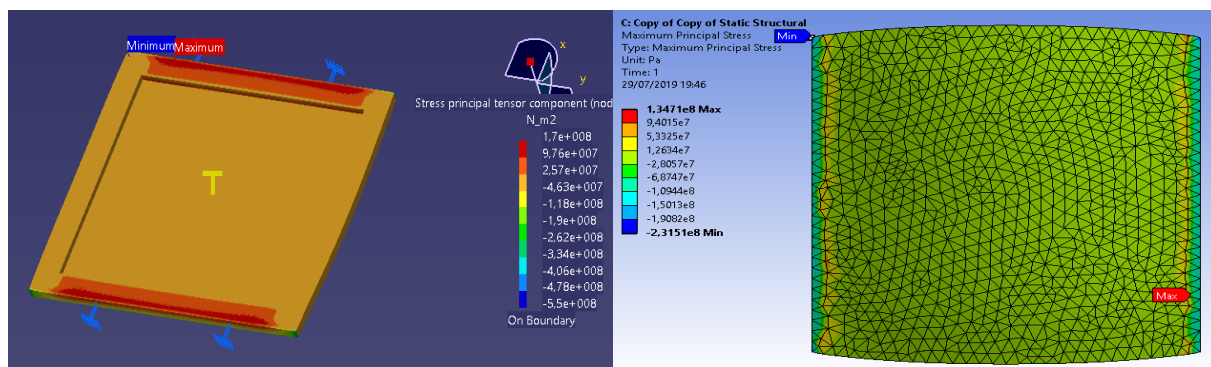


Figura 107. Tensión Principal para la acción de Temperatura en Pieza 1. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

## 6.2 Pieza 2: Tubería

### 6.2.1 Presión

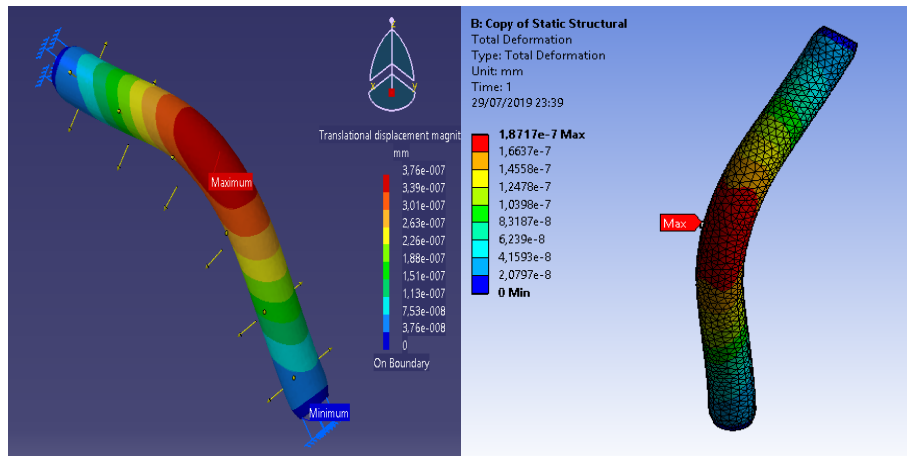


Figura 108. Desplazamiento global para la acción de Presión en Pieza 2. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

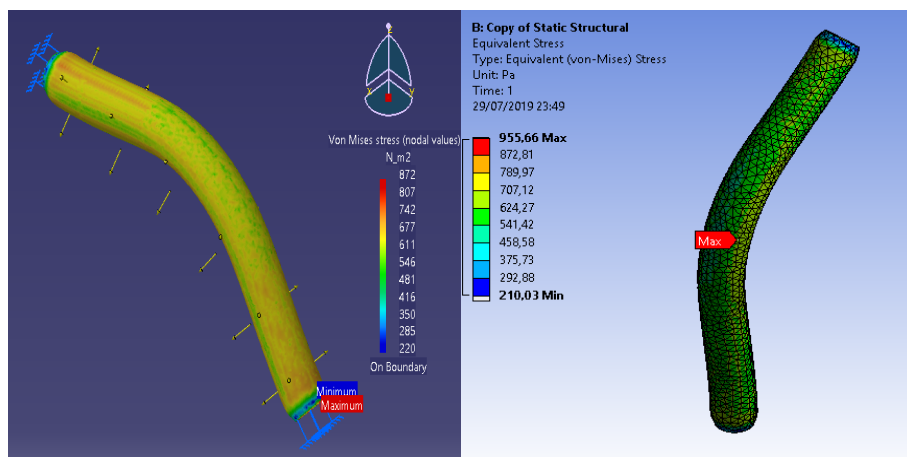


Figura 109. Tensión de Von Mises para la acción de Presión en Pieza 2. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

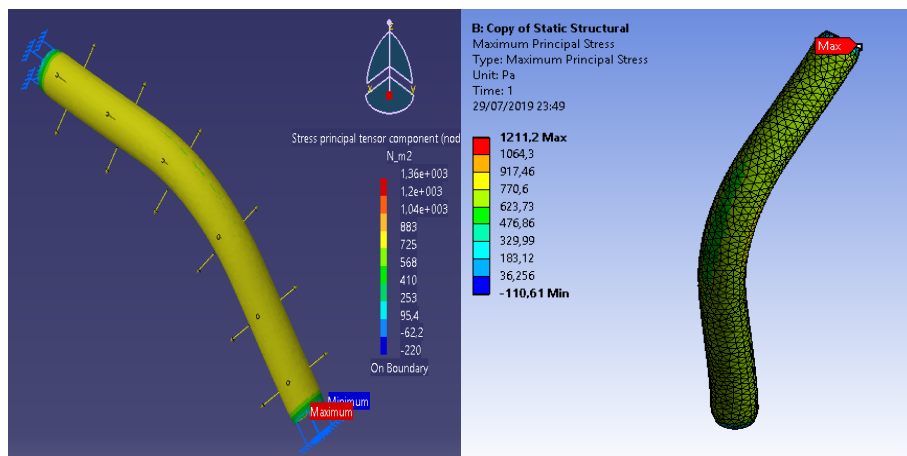


Figura 110. Tensión Principal para la acción de Presión en Pieza 2. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

## 6.2.2 Temperatura

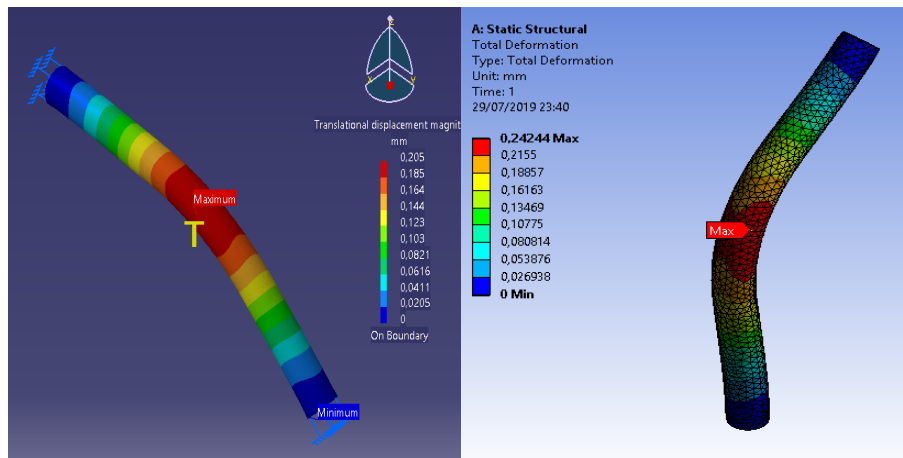


Figura 111. Desplazamiento global para la acción de Temperatura en Pieza 2. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

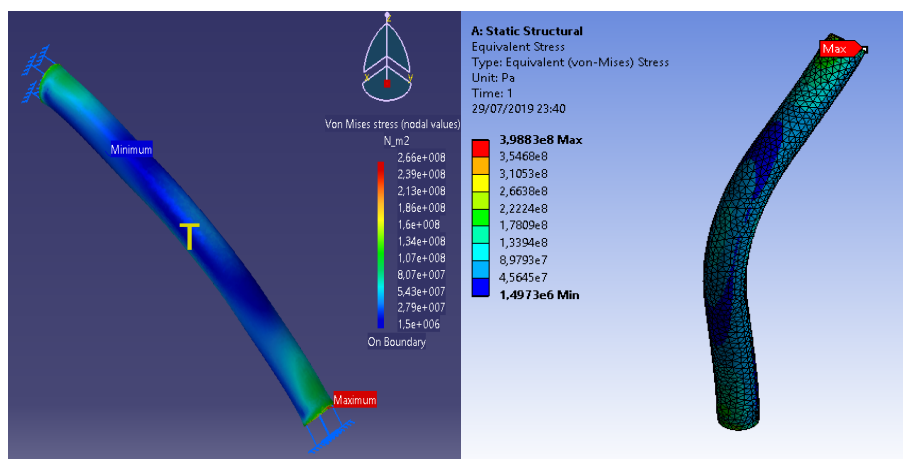


Figura 112. Tensión de Von Mises para la acción de Temperatura en Pieza 2. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

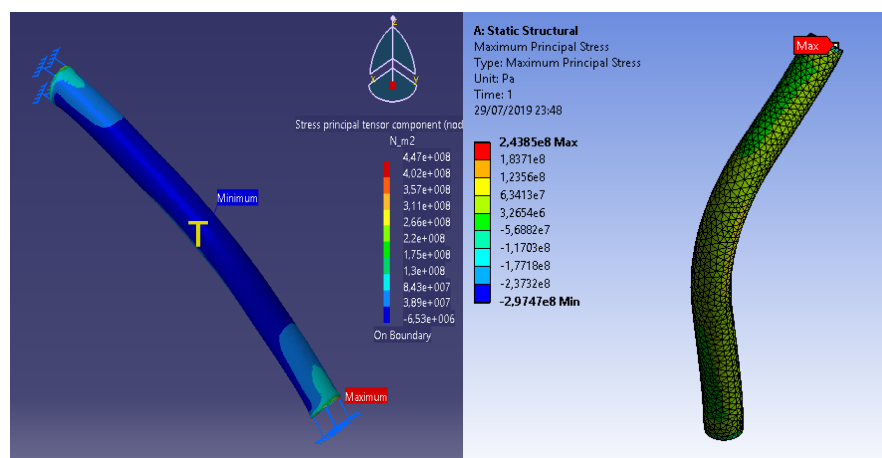


Figura 113. Tensión Principal para la acción de Temperatura en Pieza 2. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.



## 6.3 Pieza 3: Soporte con taladros

### 6.3.1 Fuerza Distribuida

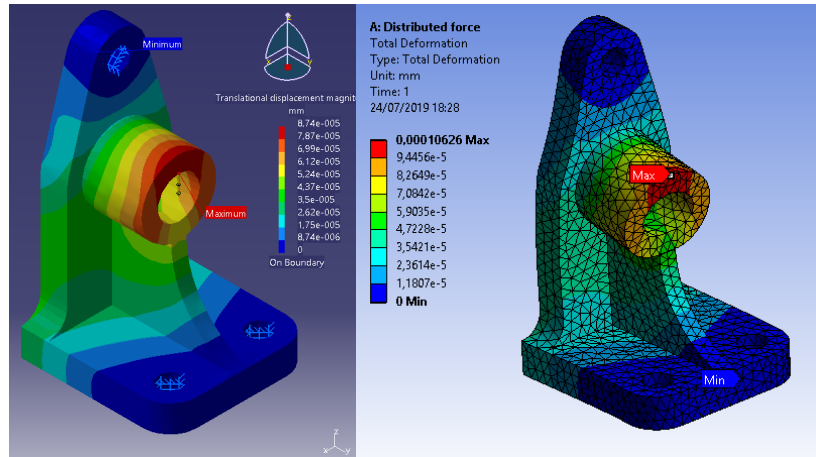


Figura 114. Desplazamiento global aplicando Fuerza Distribuida en Pieza 3. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

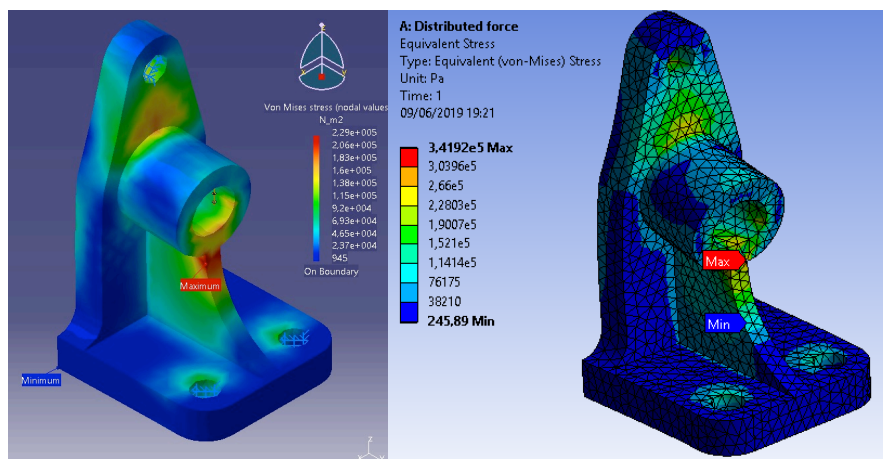


Figura 115. Tensión de Von Mises aplicando Fuerza Distribuida en Pieza 3. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

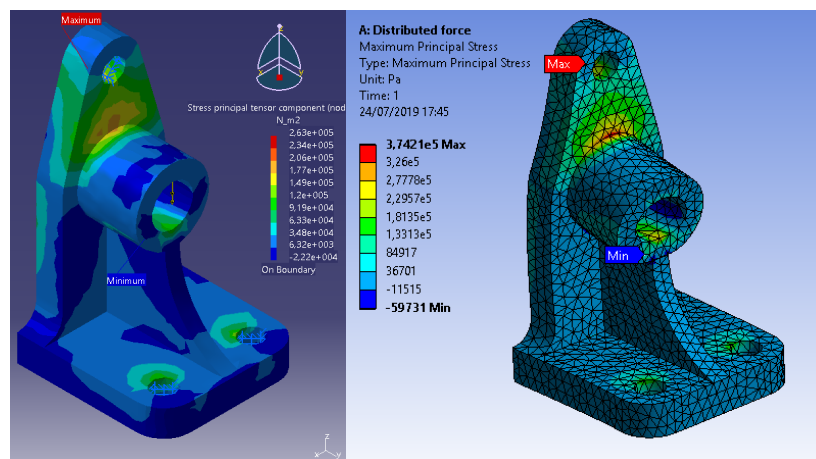


Figura 116. Tensión Principal aplicando Fuerza Distribuida en Pieza 3. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

## 6.3.2 Temperatura

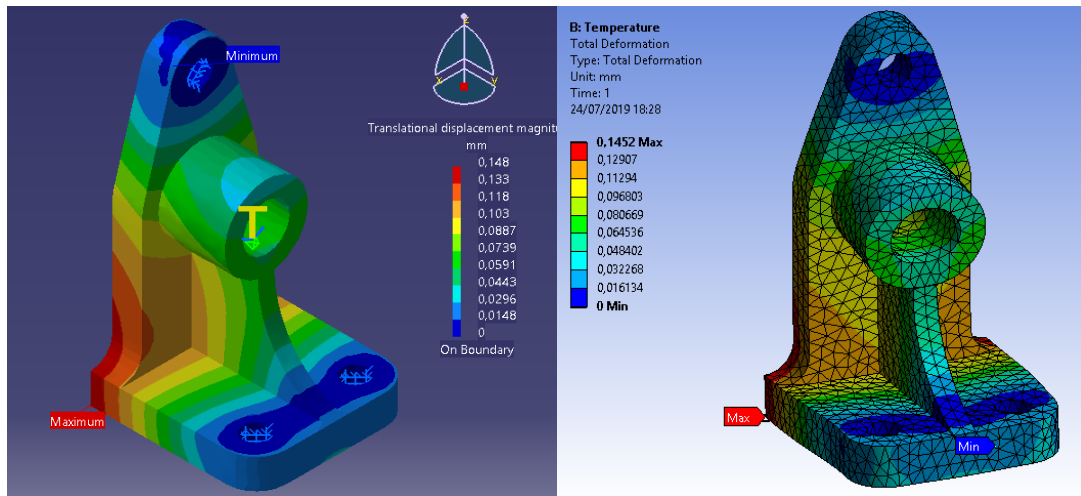


Figura 117. Desplazamiento global para la acción de Temperatura en Pieza 3. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

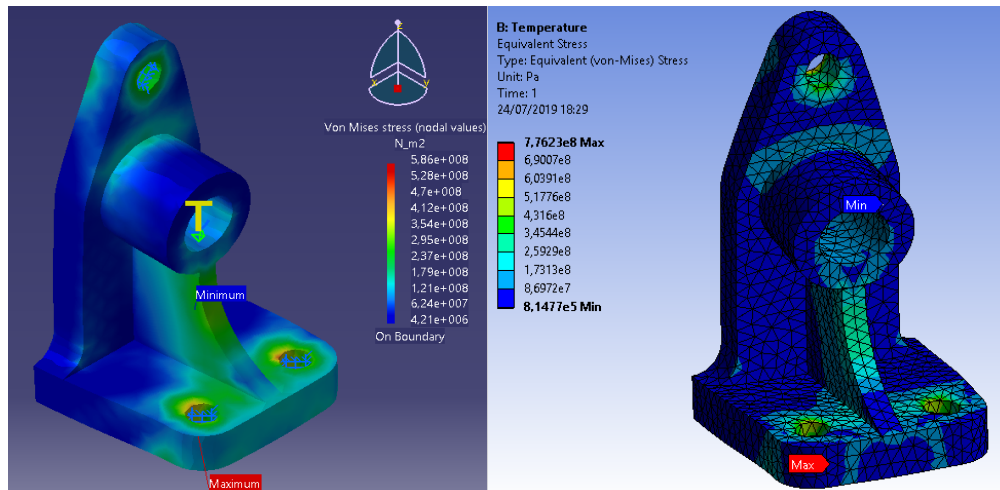


Figura 118. Tensión de Von Mises para la acción de Temperatura en Pieza 3. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

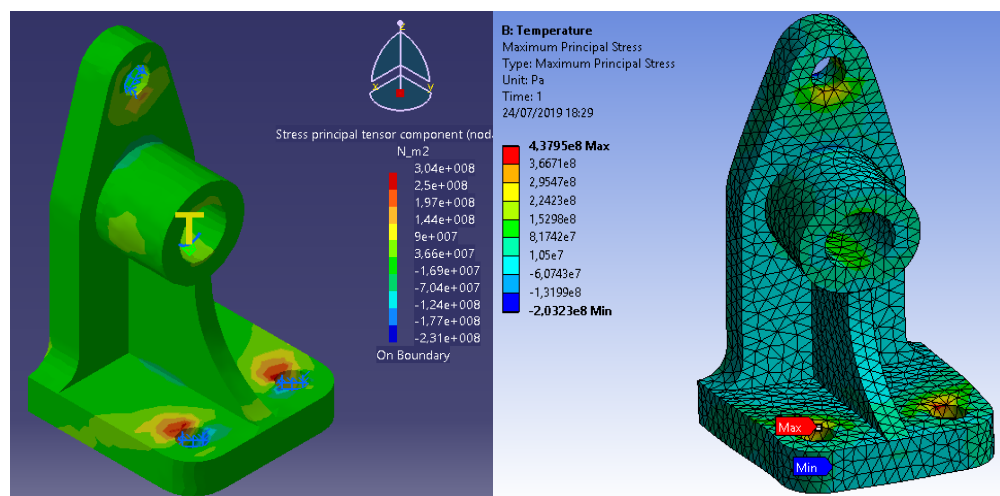


Figura 119. Tensión Principal para la acción de Temperatura en Pieza 3. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

## 6.4 Pieza 4: Cabeza de taladro

### 6.4.1 Momento Puntual

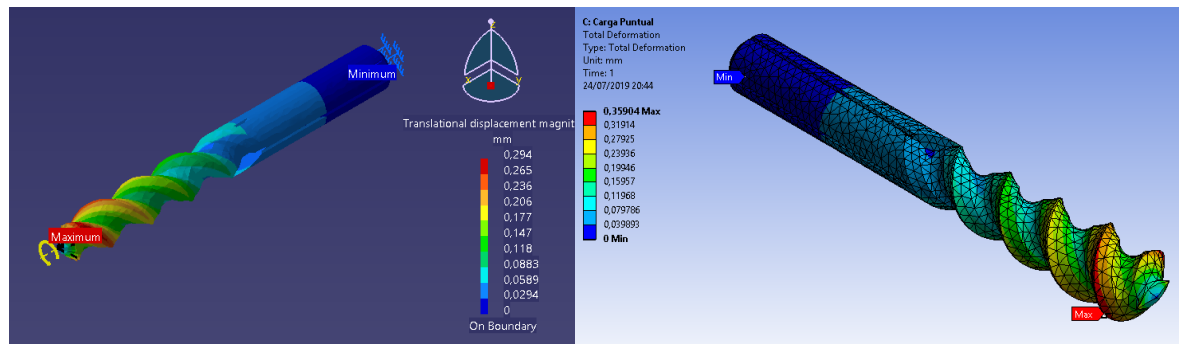


Figura 120. Desplazamiento global aplicando un Momento Puntual en Pieza 4. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

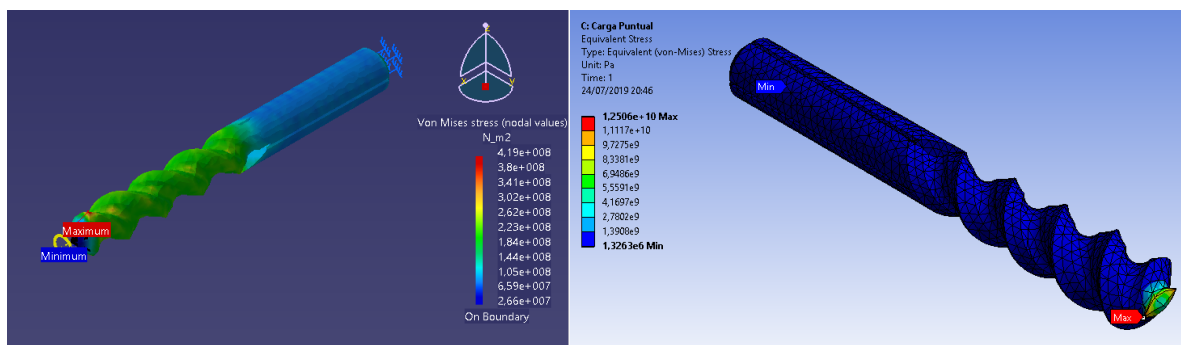


Figura 121. Tensión de Von Mises aplicando un Momento Puntual en Pieza 4. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

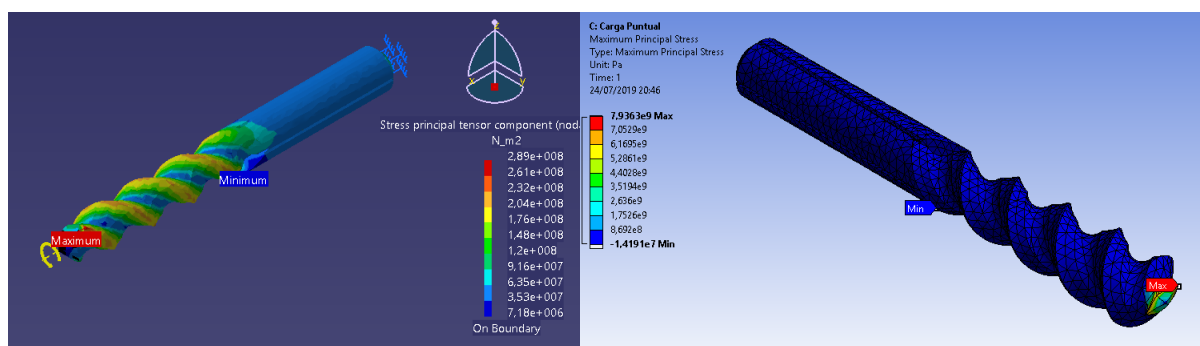


Figura 122. Tensión Principal aplicando un Momento Puntual en Pieza 4. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.



## 6.4.2 Presión

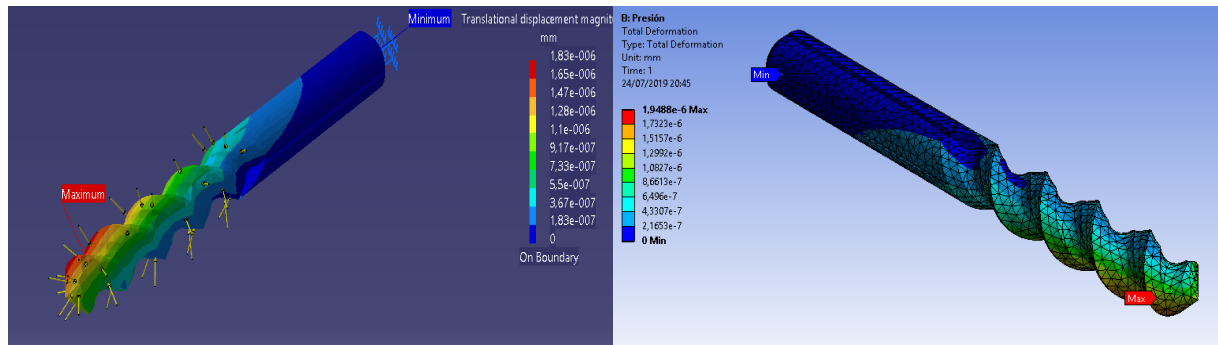


Figura 123. Desplazamiento global para la acción de Presión en Pieza 4. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

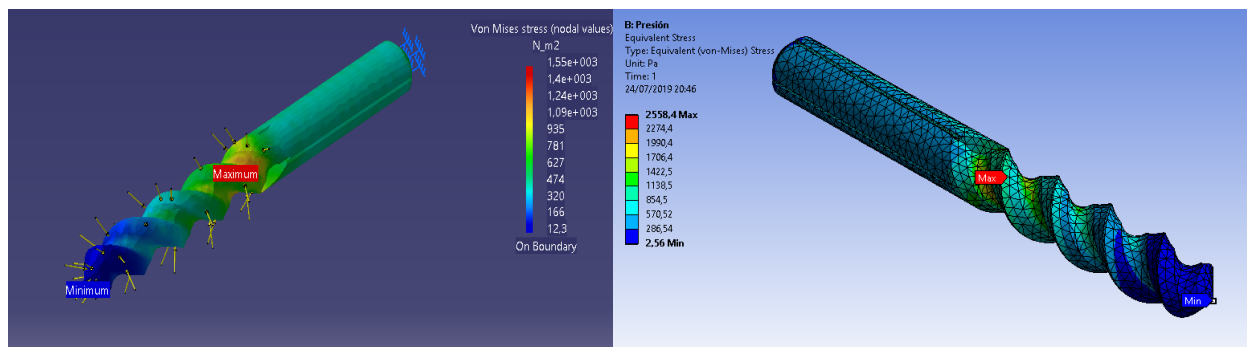


Figura 124. Tensión de Von Mises para la acción de Presión en Pieza 4. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

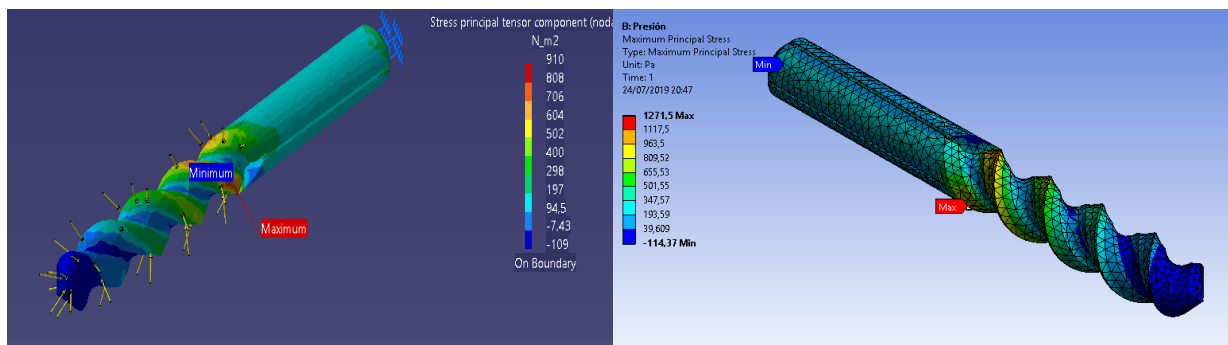


Figura 125. Tensión Principal para la acción de Presión en Pieza 4. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

### 6.4.3 Temperatura

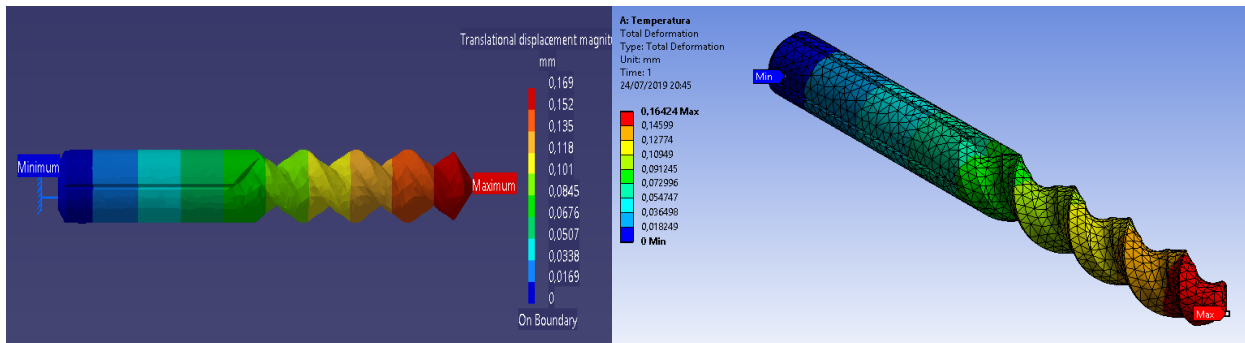


Figura 126. Desplazamiento global para la acción de Temperatura en Pieza 4. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

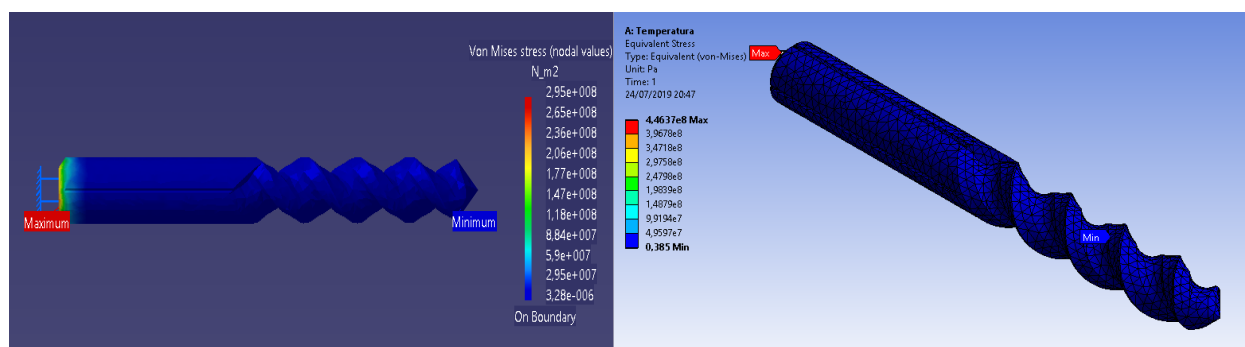


Figura 127. Tensión de Von Mises para la acción de Temperatura en Pieza 4. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

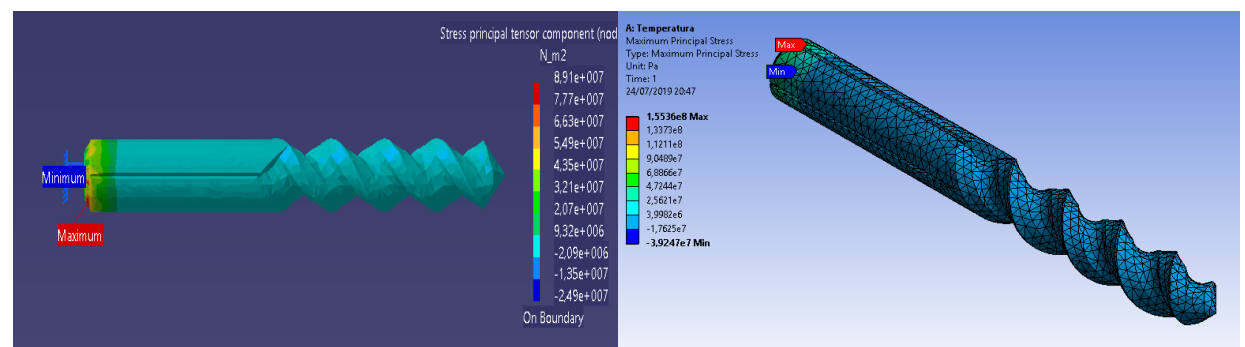


Figura 128. Tensión Principal para la acción de Temperatura en Pieza 4. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

## 6.5 Pieza 5: Llanta de vehículo

### 6.5.1 Fuerza Distribuida

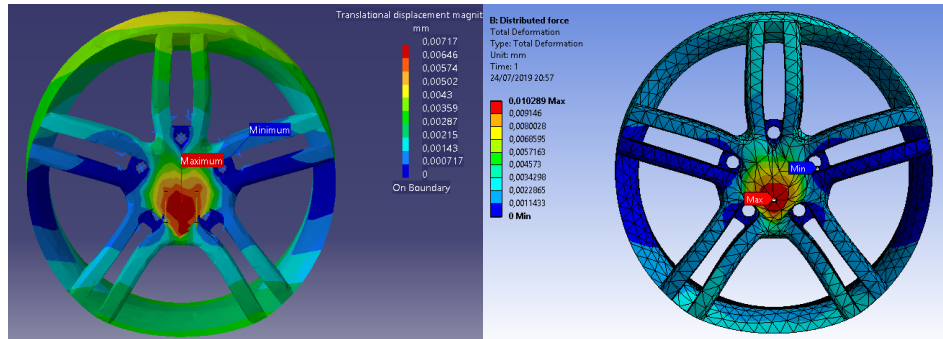


Figura 129. Desplazamiento global aplicando Fuerza Distribuida en Pieza 5. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

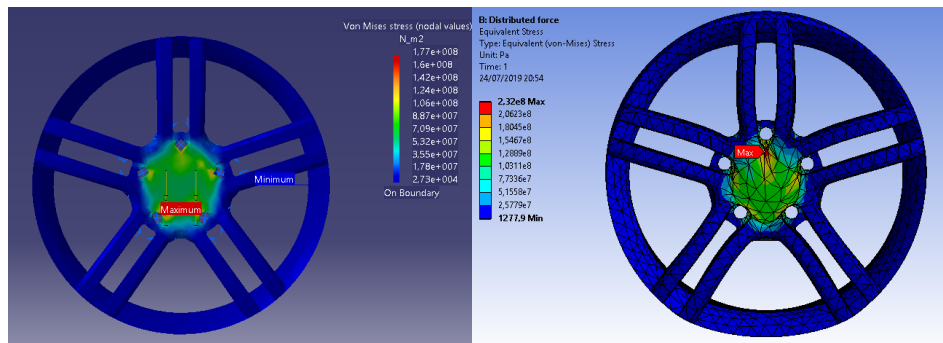


Figura 130. Tensión de Von Mises aplicando Fuerza Distribuida en Pieza 5. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

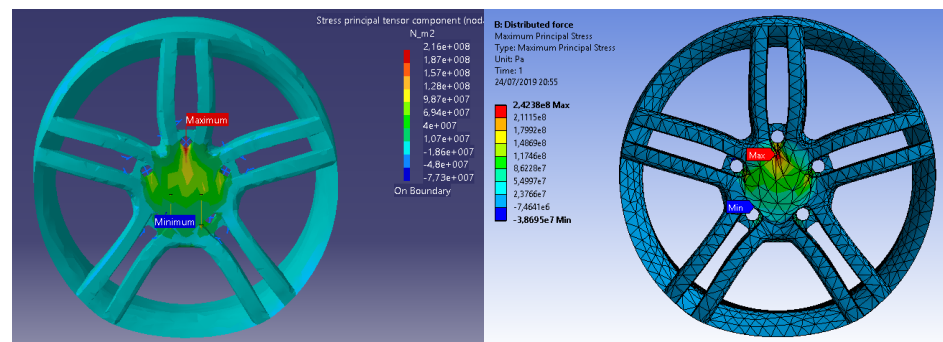


Figura 131. Tensión Principal aplicando Fuerza Distribuida en Pieza 5. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

## 6.5.2 Temperatura

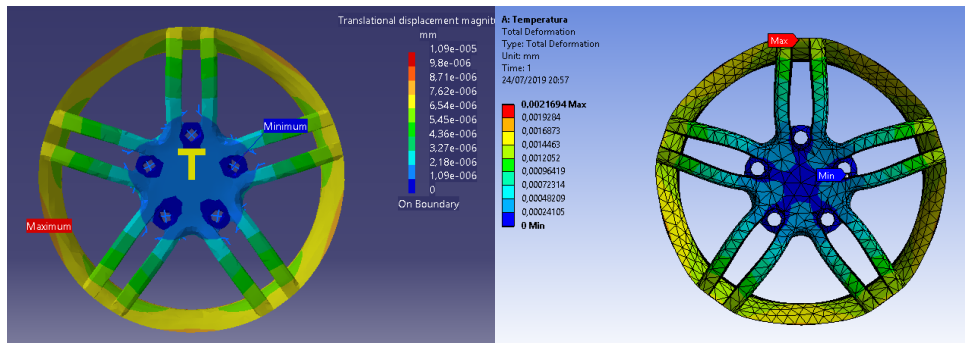


Figura 132. Desplazamiento global para la acción de Temperatura en Pieza 4. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

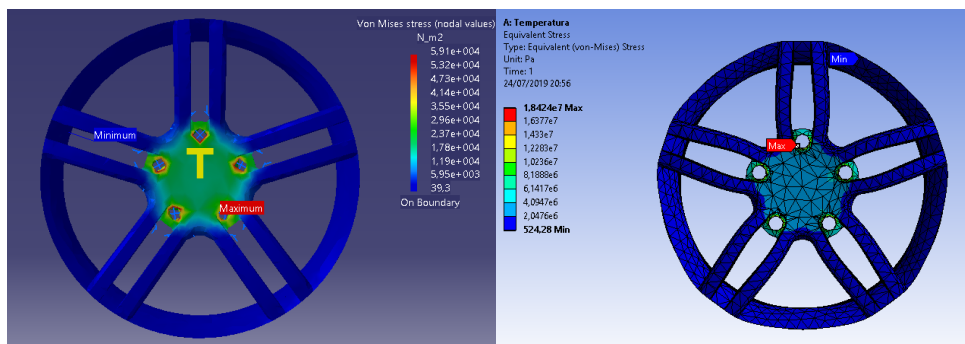


Figura 133. Tensión de Von Mises para la acción de Temperatura en Pieza 5. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

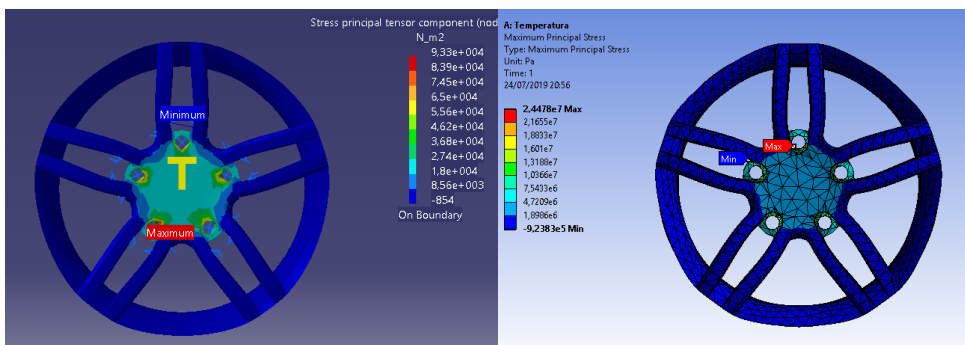


Figura 134. Tensión Principal para la acción de Temperatura en Pieza 5. Izq: CATIA. Der: ANSYS W.

# 7 DISCUSIÓN

En las Tabla 16-Tabla 18 se va a proceder a recopilar los resultados obtenidos de las simulaciones de las Piezas 1-5. Los valores se van a mostrar en función de las variables desplazamientos, tensión de Von-Mises y tensión principal. Los desplazamientos permiten validar de forma intuitiva si la simulación aporta un resultado coherente. La tensión de Von-Mises se compara con el límite elástico del material, de modo que su máximo valor ha de ser menor que el límite elástico. Finalmente, la tensión principal permite visualizar qué zonas estarán sometidas a tracción y compresión. Todos los valores que se muestran se corresponden con los valores máximos obtenidos en la simulación.

## 7.1 Carga puntual

Tabla 16. Resultados para la acción carga puntual.

Pieza	Software	Desplazamientos [mm]	Tensión de Von Mises [MPa]	Tensión principal [MPa]
<b>1</b>	ANSYS WB	0.063	6.14	6
	CATIA V5	0.012	0.94	1
	$\Delta u, \Delta v_m, \Delta p_{pal}$	<b>81 %</b>	<b>84 %</b>	<b>83%</b>
<b>4</b>	ANSYS WB	0.36	12506	7936
	CATIA V5	0.30	419	289
	$\Delta u, \Delta v_m, \Delta p_{pal}$	<b>16%</b>	<b>96.64%</b>	<b>96.35%</b>

## 7.2 Presión/Fuerza distribuida

Tabla 17. Resultados para la acción Presión/Fuerza distribuida.

Pieza	Software	Desplazamientos [mm]	Tensión de Von Mises [MPa]	Tensión principal [MPa]
<b>1</b>	ANSYS WB	0.004	0.22	0.23
	CATIA V5	0.003	0.24	0.26
	$\Delta u, \Delta v_m, \Delta p_{pal}$	<b>25%</b>	<b>8.3%</b>	<b>11.5%</b>
<b>2</b>	ANSYS WB	1.87e-7	955.7	1211.2
	CATIA V5	3.76e-7	872	1360
	$\Delta u, \Delta v_m, \Delta p_{pal}$	<b>50.3%</b>	<b>8.8%</b>	<b>11%</b>

<b>3</b>	ANSYS WB	0.0001	0.34	0.37
	CATIA V5	0.000087	0.23	0.26
	$\Delta u$ , $\Delta v_m$ , $\Delta p_{pal}$	<b>13%</b>	<b>32.4%</b>	<b>29.7%</b>
<b>4</b>	ANSYS WB	1.95e-6	2.55e-3	1.27e-3
	CATIA V5	1.83e-6	1.55e-3	0.91e-3
	$\Delta u$ , $\Delta v_m$ , $\Delta p_{pal}$	<b>6.2%</b>	<b>39.2%</b>	<b>28.3%</b>
<b>5</b>	ANSYS WB	0.010	232	242
	CATIA V5	0.007	177	216
	$\Delta u$ , $\Delta v_m$ , $\Delta p_{pal}$	<b>30%</b>	<b>23.7%</b>	<b>10.7%</b>

### 7.3 Temperatura

Tabla 18. Resultados para la acción Temperatura.

Pieza	Software	Desplazamientos [mm]	Tensión de Von Mises [MPa]	Tensión principal [MPa]
<b>1</b>	ANSYS WB	0.637	698	134
	CATIA V5	0.723	1350	170
	$\Delta u$ , $\Delta v_m$ , $\Delta p_{pal}$	<b>11.9%</b>	<b>48.3%</b>	<b>21.2%</b>
<b>2</b>	ANSYS WB	0.242	398	243
	CATIA V5	0.205	266	447
	$\Delta u$ , $\Delta v_m$ , $\Delta p_{pal}$	<b>15.3%</b>	<b>33.2%</b>	<b>45.6%</b>
<b>3</b>	ANSYS WB	0.145	776	437
	CATIA V5	0.148	586	304
	$\Delta u$ , $\Delta v_m$ , $\Delta p_{pal}$	<b>2%</b>	<b>24.5%</b>	<b>30.4%</b>
<b>4</b>	ANSYS WB	0.164	446	155
	CATIA V5	0.169	295	89.1
	$\Delta u$ , $\Delta v_m$ , $\Delta p_{pal}$	<b>3%</b>	<b>33.8%</b>	<b>36.7%</b>

<b>5</b>	ANSYS WB	0.0021	18.4	24.4
	CATIA V5	0.00001	0.06	0.093
	$\Delta u, \Delta v_m, \Delta p_{al}$	<b>99.5%</b>	<b>99.7%</b>	<b>99.6%</b>

A la luz de los resultados se observa lo siguiente:

- Para las Piezas 1: Placa cuadrada y 2: Tubería, de geometrías muy sencillas, se realizó un análisis de sensibilidad de la malla, puesto que las soluciones que proporcionaban ambos programas para un mismo tamaño de mallado eran considerablemente dispares. Con ello, los valores obtenidos de CATIA se aproximaron de forma significativa a los resultados de ANSYS WB tras refinar el mallado. Así se puede decir que, para estos casos, ANSYS WB convergió mas rápidamente a la solución que CATIA, utilizándose en este último un tamaño menor de elementos.
- Para las Piezas 3: Soporte con taladros, 4: Cabeza de taladro y 5: Llanta de vehículo, el mismo tamaño de malla fue utilizado ya que, al refinar la malla en CATIA, la solución oscilaba en torno al mismo valor. En ANSYS se ha mantenido el menor tamaño de elemento posible, ya que la versión de estudiante impone limitaciones en la malla.
- En el caso de Fuerza/Momento puntual (Piezas 1: Placa cuadrada y 4: Cabeza de taladro), los valores en tensiones difieren considerablemente de un software a otro, proporcionando ANSYS WB valores más elevados (Tabla 16). Esto indicaría que para diseñar componentes sobredimensionados sujetos a cargas puntuales, CATIA sería mas apropiado. Asimismo, la Pieza 1: Placa cuadrada presenta una gran diferencia en cuanto a desplazamientos se refiere, lo que puede indicar que el tratamiento de fuerzas puntuales en ambos programas es diferente.
- Bajo acciones de presión (Tabla 17), las Piezas 1: Placa cuadrada y 2: Tubería presentan gran disconformidad en términos de desplazamientos y poca disconformidad en términos de tensiones respecto de las Piezas 3: Soporte con taladros, 4: Cabeza de taladro y 5: Llanta de vehículo. Sin embargo, para acciones de temperatura (Tabla 18) las Piezas 1: Placa cuadrada y 2: Tubería muestran el caso contrario: mayor disconformidad en términos de tensiones que en desplazamientos. Esto revela que, dependiendo de la naturaleza de la carga, la disconformidad en desplazamientos y tensiones varía considerablemente de un software a otro.
- Para la acción de temperatura (Tabla 18) las Piezas 1-4 presentan un orden muy bajo de variación en términos de desplazamientos (<15%), mientras que las discrepancias en términos de tensiones son mayores. Por otra parte, en la Tabla 17, para las Piezas 3: Soporte con taladros y 4: Cabeza de taladro, la diferencia en desplazamientos permanece debajo de un 25%, mientras que la diferencia en tensiones es mayor, observándose, de este modo, la misma tendencia. Generalmente, en ninguna de las piezas coinciden las diferencias en desplazamientos y tensiones de manera simultánea. Esto revelaría una diferencia en la relación entre desplazamientos y tensiones para ambos programas. Sin embargo, se observan excepciones: Pieza 1: Placa cuadrada (carga puntual; Tabla 16) y Pieza 5: Llanta de vehículo (temperatura; Tabla 18), siendo en ambos casos las diferencias en desplazamientos y tensiones muy elevadas (>80%).

- Normalmente el rango de variación entre la tensión de Von-Mises y la tensión Principal es muy próximo, con una diferencia aproximada del 5% (Tablas 16 y 17). Sin embargo, en algunos casos estas diferencias son mayores (Piezas 1: Placa cuadrada y 2: Tubería; Tabla 18, Piezas 4: Cabeza de taladro y 5: Llanta de vehículo; Tabla 17).
  
- La pieza que mayor discrepancia presenta en términos de desplazamientos y tensiones es la Pieza 5: Llanta de vehículo. Si se observan las Figuras 129-134, los valores máximos sobre los que se está realizando la comparativa tienen lugar en el entorno de los taladros, que actúan como concentradores de tensión. Esto podría indicar que la discretización empleada para definir los taladros no es la más acertada; en ANSYS sería posible elegir otro método de mallado con objeto de capturar una mejor solución. Sin embargo, en CATIA este tipo de mejora estaría limitada al no existir opciones de mallado más avanzadas.
  
- Aunque la observación general es que CATIA proporciona valores menores que ANSYS, hay que recalcar que en desplazamientos los valores máximos se producen en la misma zona (Figuras 99, 102, 105, 108, 111, 114, 117, 120, 123, 126, 129 y 132). No obstante, este no siempre es el caso en cuanto a tensiones se refiere donde, a veces, el máximo/mínimo valor tiene lugar en zonas diferentes (Figuras 100, 101, 107 y 109). Esto revelaría que los resultados en términos de desplazamientos son más exactos que en términos de tensiones, lo cual tiene sentido puesto que el desplazamiento es la variable primaria que se calcula directamente al aplicar el Método de los Elementos Finitos. Las deformaciones y tensiones se calculan a partir de los desplazamientos, lo cual introduciría un error en su cálculo.



## 8 CONCLUSIONES

---

Tras realizar el estudio, a modo de resumen, pueden extraerse las siguientes conclusiones:

- CATIA está limitado a materiales elástico-lineales y pequeñas deformaciones.
- CATIA proporciona valores más bajos en tensiones respecto a ANSYS Workbench. Por lo tanto, a la hora de realizar un diseño, de utilizarse CATIA, el componente estará sobredimensionado.
- La disconformidad en tensiones y desplazamientos es dependiente de la naturaleza de la carga.
- Si la variable en consideración es el desplazamiento, la diferencia en ANSYS Workbench y CATIA no es muy significativa; dependiendo de la pieza y la sollicitación, ésta suele estar próxima al 20%. Por lo tanto, se recomienda utilizar tanto ANSYS Workbench como CATIA.
- Las discrepancias en términos de tensiones son elevadas en ambos programas; tanto ANSYS Workbench como CATIA se pueden utilizar indistintamente si el objetivo es conocer un rango de magnitud en tensiones. Sin embargo, este no sería el caso para el diseño exhaustivo de un componente.
- Para piezas con geometrías más complejas y concentradores de tensión, las opciones de mallado están particularmente limitadas en CATIA; ANSYS permite opciones más avanzadas para refinar la malla en zonas específicas, mejorando la convergencia numérica.
- Los dos programas tienen una interfaz de simulación sencilla de utilizar. Sin embargo, ANSYS Workbench permite la simulación de forma simultánea de varias sollicitaciones independientes; este no sería el caso para CATIA, que requiere guardar las simulaciones en archivos diferentes.



# REFERENCIAS

---

- [1] Wikipedia, «NASA,» [En línea]. Available: <https://en.wikipedia.org/wiki/NASA>. [Último acceso: 06/05/2019].
- [2] «A Hands-on Introduction to Engineering Simulations,» Cornell University, 2017. [En línea].
- [3] F. P. Carballo, Teoría de la Elasticidad, 1996.
- [4] C. Santiuste Romero, Temas 1,3,4: Elasticidad y Resistencia de materiales, vol. 2, Universidad Carlos III: Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras.
- [5] Wikipedia, «Método de los elementos finitos,» [En línea]. Available: [https://es.wikipedia.org/wiki/Método\\_de\\_los\\_elementos\\_finitos](https://es.wikipedia.org/wiki/Método_de_los_elementos_finitos). [Último acceso: 06/05/2019].
- [6] C. Kadapa, «What is the difference between strong form and weak form,» Swansea University, 2013. [En línea]. Available: [https://www.researchgate.net/post/What\\_is\\_the\\_difference\\_between\\_strong\\_form\\_and\\_weak\\_form](https://www.researchgate.net/post/What_is_the_difference_between_strong_form_and_weak_form). [Último acceso: 06/05/2019].
- [7] V. Fachinotti, «Principio de los trabajos virtuales,» Universidad Nacional del Litoral, [En línea]. Available: [https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/MC/WebHome/02Princ\\_Trabajos\\_Virtuales.pdf](https://cimec.org.ar/foswiki/pub/Main/MC/WebHome/02Princ_Trabajos_Virtuales.pdf). [Último acceso: 06/05/2019].
- [8] M. P. Castany, «Procedimiento para cálculo de estructuras por el Método de los Elementos Finitos con error prefijado utilizando refinamiento de malla adaptativo,» 2014.
- [9] D. I. S. Cepillo, «Capítulo 5: Diseño Óptimo de Laminados en Materiales Compuestos,» de *Aplicación del MEF y el Método de las Superficies de Respuesta*, Universidad de Sevilla, Junio 2009.
- [10] J. C. L. Vaca, S. Botello y H. Esqueda, «Aplicación del Método de los Elementos Finitos en la Simulación de Cimentaciones Superficiales,» 2005.
- [11] J. Díaz, A. Baldomir y L. Romera, «Tema 5: elementos finitos en elasticidad 2D,» de *Tecnología de la Construcción*, Universidad da Coruña.
- [12] E. N. Padrón, R. G. Carbonell y E. O. Díaz, Una introducción al análisis por elementos finitos: aplicaciones y ejemplos.
- [13] F. A. Santiago Pezzotti, Introducción a la Teoría de Elementos Finitos, 2017.
- [14] E. F. Valero, «Aportaciones al estudio de las máquinas eléctricas de Tesis Doctoral: flujo axial mediante la aplicación del método de los elementos finitos,» Universidad Politécnica de Catalunya, 2004.
- [15] W. Cheney y D. Kincaid, Numerical Mathematics and Computing.
- [16] K. Mohiddin, «Application of Gaussian quadrature in FEM,» 2012.
- [17] T. Delft, «Fundamentals,» de *ME41410 Structural design with FEM*.

- [18] Yabrimar Pérez, «Software para Ingenieros,» 2014. [En línea]. Available: <https://prezi.com/5gpaxfmr0r5l/software-para-ingenieros/>. [Último acceso: 14/05/2019].
- [19] «Choosing Between Linear and Higher Order Elements,» Ansys Help Documentation, [En línea]. Available: [https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/17.0/en-us/help/ans\\_mod/Hlp\\_G\\_MOD2\\_4.html](https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/17.0/en-us/help/ans_mod/Hlp_G_MOD2_4.html). [Último acceso: 14/05/2019].
- [20] F. Gómez-Estern, Breve Introducción a CATIA V5 Release 7, 2004.
- [21] S. Dannana, «CATIA V5 Modules list,» 2017. [En línea]. Available: <https://extrudesign.com/catia-v5-modules-list/>. [Último acceso: 14/05/2019].
- [22] L. G. Guzmán, Comparación de resultados entre los módulos de análisis estructural de CATIA V5 y ANSYS, Sevilla, 2014.
- [23] «Guía Técnica de Agua Caliente Sanitaria Central,» *Instituto para la Diversificación y Ahorro de la Energía, Ministerio de Industria, Turismo y Comercio.*